Níveis de aprendizagem para o tópico de funções no Ensino Médio

Lilian Nasser
Doutora em Educação Matemática (University of London).
Pesquisadora do Projeto Fundão e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Rio de Janeiro, Brasil.
orcid.org/0000-0001-6050-4807
✉lnasser.mat@gmail.com

Eduarda de Jesus Cardoso
Mestra em Educação Matemática (UFRJ).
Rio de Janeiro, Brasil.
orcid.org/0000-0002-3851-8759
✉eduardadjc@gmail.com

Resumo: A Teoria de van Hiele para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico tem sido considerada como guia ao ensino e à aprendizagem de Geometria. Este modelo consiste em dois grandes princípios: descrição da estrutura cognitiva, caracterizada por níveis mentais hierárquicos a serem atingidos pelos alunos e pela metodologia de ensino para que estes níveis sejam alcançados, orientando professores quanto à tomada de decisão relacionada ao ensino. A partir de um estudo sobre os modelos de desenvolvimento do pensamento sobre a linguagem de funções, este trabalho tem o objetivo de relatar o processo de testagem e validação de um modelo de níveis de desenvolvimento para a aquisição do conceito de função, baseado no modelo de Van Hiele. Para isso, foram aplicadas atividades variadas a alunos do Ensino Médio. Os resultados comprovam a validade da escala proposta, já que a classificação dos alunos da amostra se distribuiu por todos os níveis, obedecendo a hierarquia.

Palavras-chave: Função. Teoria de van Hiele. Níveis de aprendizagem. Classificação dos alunos. Intervenção didática.

Levels of knowledge for the function topic in High School

Abstract: The van Hiele theory for the development of geometric thinking has been considered as a guide for geometry teaching/learning. This model is based on two main principles: the description of cognitive structure, characterized by hierarchical mental levels to be achieved by the students and the teaching methodology for these levels beeing achieved, in order to guide educators concerning teaching decisions related to the leaning. From a study of the development models of thought on language of functions, this paper aims to report the process of testing and validating a model of levels of development for the acquisition of the concept of function, based on Van Hiele's model. For this, activities were applied to high school students. The results prove the validity of the proposed scale, since the students' classification in the sample was distributed at all levels, obeying the hierarchy.

Recebido em 04/03/2020
Aceito em 03/04/2020
Publicado em 06/04/2020

eISSN 2675-1933
10.37853/pqe.e202008

CC BY NC SA

Pesquisa e Ensino

Keywords: Function. Van Hiele theory. Levels of knowledge. Levels of understanding. Pupils' classification. Didactic intervention.

Niveles de aprendizaje para el tema de función en la Escuela Secundaria

Resumen: La teoría de van Hiele para el desarrollo del pensamiento geométrico ha sido considerada como una guía para la enseñanza / aprendizaje de la geometría. Este modelo consta de dos grandes principios: la descripción de la estructura cognitiva, que se caracteriza por los niveles mentales jerárquicos que deben alcanzarlos estudiantes y por la metodología de enseñanza para alcanzar estos niveles, con el fin de guiar a los educadores con respecto a la toma de decisiones relacionadas con la enseñanza basado en un estudio sobre los modelos de desarrollo del pensamiento sobre el lenguaje de funciones, este trabajo tiene como objetivo reportar al proceso del testagem y de la validación de un modelo de niveles del desarrollo para la adquisición del concepto de la función basadas en el modelo Van Hiele para aprender geometría. Para eso, se aplicaron actividades a estudiantes de secundaria. Los resultados prueban la validez de la oferta de la escala, desde la clasificación de los pupilos de la muestra si están distribuidos para todos los niveles, obedeciendo la jerarquía.

Palabras clave: Función. La teoría de van Hiele. Niveles de aprendizaje. Clasificación de alumnos. Intervención didáctica.

1 Introdução

O ensino e a aprendizagem de funções vêm se tornando sistematicamente motivo de grande preocupação para professores e pesquisadores, devido a dificuldades dos alunos em construir tal conceito. Isso se reflete no baixo rendimento escolar e em elevados índices de reprovação em disciplinas do nível superior, como Cálculo Diferencial e Integral, tornando-se um dos maiores desafios para os profissionais da Matemática (Rezende, 2003). Segundo Pinto (2014), trata-se de um tema importante, mas que, talvez, não seja abordado na escola com a amplitude e conexão adequadas para que fique evidente o seu papel na compreensão de outros temas matemáticos e de questões de outros campos de saber.

Pesquisas foram realizadas com o intuito de entender os processos de ensino e de aprendizagem de funções, tais como as de Bergeron & Herscovics (1982), Vinner (1989), Even (1990), Sierpinska (1992), Tall (1991) e Isoda (1996). No Brasil, destacam-se os trabalhos de Rezende (2003), Trindade (1996) e Sant'Anna (2001). Estes trabalhos apontam que a aprendizagem de funções é um processo evolutivo, lento e gradual devido à sua complexidade, uma vez que existem vários tipos diferentes de representações para uma mesma função.

Muitos dos aspectos relacionados às dificuldades dos alunos na aprendizagem de funções podem ser compreendidos na perspectiva dos obstáculos epistemológicos. De acordo com Sierpinska (1992, p.28), "se o obstáculo não for apenas nosso ou de algumas outras pessoas, mas for mais generalizado, ou foi generalizado em alguma época ou em alguma cultura, então ele é conhecido como um obstáculo epistemológico". A partir da perspectiva epistemológica, os obstáculos relativos à apropriação do conceito de função têm se mostrado de fundamental importância no processo de formação dos saberes dos estudantes, e na elaboração de modelos de intervenção didática para os processos de ensino e de aprendizagem deste tópico.

Cardoso (2016) propôs uma escala de níveis para a aprendizagem de funções, baseada na teoria de Van Hiele, concordando com a característica de que o progresso nos níveis depende do ensino, e não apenas da maturidade dos alunos. O objetivo deste trabalho é relatar o processo de testagem e validação de um modelo de níveis de desenvolvimento para a aquisição do conceito de função, baseado no modelo de van Hiele, proposto por Cardoso(2016) em sua dissertação de mestrado.

2 O tópico de funções

O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática, uma vez que este tópico se relaciona tanto com temas e conteúdos dentro da matemática como de outras disciplinas. Para Oliveira (2010) a aquisição do conceito de função envolve diversos contextos que variam desde a percepção de regularidades até a generalização e abstração de comportamentos através do uso de linguagem matemática.

Devido à grande abrangência do conceito de função, o tópico envolve múltiplas concepções e representações. Portanto, faz-se necessário compreender o sentido que este conceito pode assumir em diferentes contextos. Estas múltiplas representações, quando desenvolvidas de forma articulada, levam a uma melhor compreensão. De acordo com Sierpinska (1992), há várias formas de representar funções, sendo que as mais conhecidas e utilizadas, pelo menos na escola, são tabelas, gráficos e expressão analítica. A pesquisadora afirma ainda que a consciência de que cada uma das representações configura-se em uma limitação e o mesmo conceito geral é condição fundamental para o entendimento de funções.

Para Duval (2003), o funcionamento cognitivo possibilita ao aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos. Ainda segundo o pesquisador, a compreensão em Matemática depende da capacidade de mudar de registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação.

Na Matemática, diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida etc.). O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas (Duval, 2003, p. 21).

No caso da aprendizagem de funções, a teoria de Duval (2009) aponta a necessidade de situações didáticas que proporcionem aos alunos o domínio das representações verbal, gráfica, tabular e analítica, e a articular a transição entre esses registros. Baseados nos trabalhos de Duval, pesquisadores como Nasser, Biazutti, Torraca, Barros e Vaz (2019) constataram que a passagem da expressão analítica da função para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto acarreta problemas na passagem inversa. A prática sistemática dessa abordagem não favorece a interpretação global, que é, em geral, deixada de lado,uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica. Isso ajuda a compreender porque a maioria dos alunos apresenta dificuldades na utilização correta das representações gráficas, mesmo no Ensino Superior.

Com o intuito de auxiliar os alunos na aquisição deste tópico, surgem modelos construtivistas que visam promover a construção do conceito de função de forma gradativa e abrangente. Assim, foram desenvolvidos com o objetivo de superar alguns obstáculos epistemológicos.

A seguir, descrevemos o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto pelo casal Van Hiele e duas propostas de níveis de desenvolvimento de funções que serviram de motivação para a elaboração da proposta de Cardoso (2016).

Neste trabalho, consideramos o conceito de função como relação entre duas grandezas. Por se tratar de uma pesquisa com alunos do Ensino Médio, consideramos as definições de função apresentadas nos livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Nesses livros, a função, em geral, é representada por uma expressão analítica, a partir da qual é construída uma tabela de correspondência entre as grandezas envolvidas e a representação gráfica no plano cartesiano.

3 Teoria de Van Hiele

Os educadores holandeses Dina van Hiele-Geldof e seu marido Pierre Marie van Hiele desenvolveram estudos sobre o pensamento geométrico que resultaram nas teses de doutorado do casal na Universidade de Utrecht, na Holanda. Esses estudos apontaram que: a aprendizagem de geometria ocorre em níveis hierárquicos de conhecimento; quando o ensinamento ocorre em um nível cognitivo acima do qual o aluno se encontra os conceitos não são compreendidos e fixados; o crescimento relativo à idade não produz automaticamente um crescimento no nível do pensamento geométrico. A teoria proposta consiste de cinco níveis de compreensão de ideias geométricas, em que o aluno avança de nível a partir de sua maturidade geométrica.

Os níveis de desenvolvimento da compreensão em geometria sugeridos pelo casal van Hiele são descritos por Shaughnessy e Burger (1985, p.420) como: Nível 0 -

Visualização; Nível 1 - Análise; Nível 2 - Dedução Informal; Nível 3 - Dedução Formal; e Nível 4 - Rigor. O detalhamento dos níveis está descrito no quadro 1 a seguir.

Estes níveis explicam como se desenvolve o pensamento geométrico dos estudantes. De acordo com Nasser (1992), a teoria sugere que a linguagem, o insight e o tipo de experiências vivenciadas desempenham papeis essenciais nesse desenvolvimento. Os objetos (ideias) devem ser criados em um nível para que as relações entre esses objetos possam se tornar o foco do próximo nível. Desta forma, o modelo afirma que o aluno move-se sequencialmente a partir do nível inicial até o nível mais elevado, não sendo possível "pular" de nível. Além de fornecerem uma compreensão daquilo que há de específico em cada nível de pensamento geométrico, os van Hiele identificaram propriedades que caracterizam o modelo, bem como definiram uma metodologia específica para o avanço de níveis, estabelecendo as fases de aprendizagem (van Hiele, 1986).

Alguns estudos investigaram extensões do modelo de van Hiele, como sua aplicação a tópicos específicos de Geometria (Nasser, 1992), a outros conteúdos da Matemática (Isoda, 1996; Sant'Anna, 2001; Cardoso & Nasser, 2016) ou mesmo sua influência em estratégias adotadas no ensino (Armah & Kissi, 2019; Passos, Buriasco & Soares, 2019).

4 A pesquisa de Isoda (1996)

Este modelo de desenvolvimento de linguagem de funções foi criado comparando as práticas de ensino e o currículo nacional japonês com formas generalizadas dos níveis de van Hiele. O estudo de Isoda utiliza a estrutura dos níveis de compreensão geométrica e mostra que eles também podem indicar características para a linguagem de funções.Estas características incluem: hierarquia da linguagem, dualidade de objeto e método, linguagem matemática e contextualização do pensamento dos alunos (Isoda, 1996, p. 105).

Por meio de investigações sobre o desenvolvimento da linguagem dos alunos em funções e sua origem histórica, os níveis de compreensão foram elaborados tomando como base os níveis de compreensão geométrica. Foram descritos por Isoda cinco níveis: Linguagem Cotidiana, Aritmética, Álgebra e Geometria, Cálculo e Análise. A descrição dos níveis encontra-se no Quadro 1.

5 Modelo proposto por Bergeron & Herscovics (1982)

Os pesquisadores Jacques C. Bergeron e Nicolas Herscovics também desenvolveram um esquema com etapas para o ensino de funções. Neste modelo, os pesquisadores basearam-se nos obstáculos cognitivos apresentados pelos alunos. Bergeron & Hercovics (1982) usaram uma abordagem construtivista, partindo da intuição dos alunos para a formalização, em que cada nível foi construído sobre o anterior. Os níveis são descritos como: Compreensão Intuitiva, Matematização Inicial, Abstração e Formalização. Estes níveis estão descritos no Quadro 1.

O Quadro 1 a seguir resume as principais características de cada um dos níveis de pensamento utilizados como referência. Para a descrição destes níveis nos baseamos nos trabalhos de Crowley (1994) e Van de Walle, Karp & Williams (2010) para os níveis de pensamento geométrico sugeridos pelo casal van Hiele, e de Isoda (1996) e Bergeron & Hercovics (1982) para os modelos de pensamento de linguagem de funções.

Quadro 1 – Níveis de Pensamento Geométrico e de funções

	Níveis de van Hiele	Modelo de Isoda	Modelo de Bergeron & Herscovics
1º nível	Raciocínio basicamente por meio de considerações visuais, os conceitos de geometria são vistos como um todo. As figuras geométricas são reconhecidas pela aparência global e pela forma e não pelas partes ou propriedades.	Raciocínio por meio de especulações, através da linguagem cotidiana, o conceito de função é visto como um todo, não sendo levadas em conta considerações explícitas das propriedades dos seus componentes. Normalmente suas descrições são feitas com base em uma variável fisicamente evidente.	Pensamento com base na percepção visual e ações primitivas não quantificadas, resultando em aproximações.
2º nível	Análise informal dos conceitos geométricos através de observação e experimentação. Discernimento das caracterís-ticas das figuras geométricas, com a identificação de propriedades usadas para	Inicia-se uma análise informal dos estudos de funções através do uso de aritmética e tabelas. Ao explorarem as tabelas, os alunos descrevem as regras de relações.	Organização e quantifi-cação das primeiras noções intuitivas para a construção de um conceito.

	conceituar classes e formas.		
3º nível	Estabelecimento de inter-relações de propriedades dentro de figuras e entre figuras, formação de definições abstratas, dedução de propriedades de uma figura, reconhecimento de classes de figuras. As definições passam a ter significado, acompanhamento e formulação de argumentos informais.	Estabelecimento de inter-relações entre a lei de formação das funções e seus gráficos, conversão das notações de tabelas, equações e gráficos através de álgebra e geometria.	O conceito se destaca do procedimento e alcança uma existência própria. Domínio de generalizações.
4º nível	Desenvolvimento de sequências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de outras, percepção da inter-relação e do papel de termos não definidos, axiomas, postulados, demonstrações.	Estudo das funções a partir de conhecimentos de cálculo, como limite, derivada e integral.	Uso da linguagem simbólica, justificação lógica das operações, descontextualização e descoberta dos axiomas.
5º nível	A geometria é vista no plano abstrato, domínio de geometrias não euclidianas.	Análise funcional.	

Fonte: elaboração própria

Apesar de os pesquisadores supracitados terem proposto níveis de desenvolvimento para a linguagem de funções, estes não foram pensados para a realidade brasileira e não necessariamente para alunos de Ensino Médio. A proposta de Isoda, por exemplo, foi formulada de acordo com o currículo japonês e os dois últimos níveis (cálculo e análise) não têm correspondência com o Ensino Médio no Brasil.

A pesquisadora Neide Sant'Anna (2011) utilizou uma hierarquia inspirada na teoria de Van Hiele para funções com alunos de Ensino Médio do Colégio Pedro II em sua dissertação de mestrado. No entanto, ela apenas classificou os itens aplicados numa escala de níveis, não especificando as habilidades inerentes a cada nível. Estes trabalhos nos motivaram, levando-nos a pensar na validade de uma escala de níveis de pensamento sobre funções, de alunos do Ensino Médio, voltados para a realidade brasileira.

Os trabalhos de pesquisa citados anteriormente serviram como referência para identificarmos os problemas de aprendizagem referentes a estes estudantes, enquanto os modelos descritos no Quadro 1 nos auxiliaram no desenho da nova escala de níveis.

6 A proposta para a escala de níveis de funções

Com base nos níveis de van Hiele e nas outras referências estudadas, esta pesquisa relata o processo de testagem e validação de um modelo para níveis de desenvolvimento do pensamento de funções, proposto por Cardoso (2016). Este modelo segue a mesma estrutura proposta pelo casal Van Hiele, com níveis hierárquicos, em que um aluno pode apresentar o pensamento correspondente a um nível específico ou estar em transição de um nível para o outro, sem desobedecer a hierarquia.

As características dos níveis de van Hiele para geometria foram levadas em consideração no estabelecimento dos níveis desta escala para funções, bem como as propostas de Isoda e Bergeron & Herscovics. Ou seja, para descrever as características de pensamento dos estudantes sobre o tópico de funções nos níveis da escala proposta, foram considerados os estudos sobre a teoria de van Hiele de Shaughnessy e Burger (1985), Fuys, Guedes e Tischler (1988), Nasser (1992) e Crowley (1994), além da descrição de Sant'Anna (2001) sobre o progresso na aquisição do conceito de função.

O Quadro 2 apresenta a descrição dos níveis considerados neste trabalho, propostos por Cardoso (2015), para o desenvolvimento do pensamento de alunos do Ensino Médio sobre o conceito de função.

Quadro 2 – Modelo de níveis para funções proposto por Cardoso (2015)

	Descrição	Exemplo
1º nível	Reconhecimento das variáveis dependente e independente, estabelecimento de esquemas visuais e tabelas. Noções não formais de variação.	Os alunos conseguem identificar as variáveis envolvidas num problema prático, reconhecendo a diferença entre as variáveis dependente e independente.
2º nível	Reconhecimento do domínio e contradomínio, marcação de pares ordenados a partir da expressão algébrica de uma função. Uso da notação y = f(x).	Reconhecimento dos valores que as variáveis podem assumir. Distinção entre domínio como um conjunto contínuo ou discreto.
3º nível	Identificação da expressão analítica da função, distinção entre equação e função, construção e interpretação de gráficos.	Determinação de uma expressão analítica a partir de uma situação problema e/ou sua representação gráfica.
4º nível	Reconhecimento de funções injetoras, sobrejetoras, pares e ímpares, operações com funções,	Dada a definição de função par e o gráfico de uma função para os reais positivos, os alunos completam o gráfico de modo que a função

	relação entre funções.	seja par para todos os reais. Dado o gráfico de *f(x)*, esboçar o gráfico da função $y = 2\,f(x)$.

Fonte: Adaptado de Cardoso (2015)

A fim de validar esta escala, ou seja, verificar se eram de fato hierárquicos, e descrever o desempenho de sujeitos em cada nível, foi elaborada uma sequência de atividades, aplicadas inicialmente com alunos do Ensino Médio de uma escola privada do Rio de Janeiro. Foram convidados os 14 alunos do 3º ano, dosquais apenas 06 concordaram em participar voluntariamente. Infelizmente, estes alunos não alcançaram todos os níveis da escala proposta, o que levou à necessidade de aumentar a amostra.

Para isso, desenvolvemos outra sequência didática, para ser aplicada a uma amostra bem mais ampla de alunos de Ensino Médio. Esta nova amostra foi composta pelos 06 alunos da escola particular inicial, 12 alunos do Colégio de Aplicação de uma universidade estadual, sendo 06 do primeiro ano e 06 do segundo ano, e 13 alunos do terceiro ano de um curso técnico federal. Com essa amostra, foi possível validar a hierarquia dos níveis propostos para o conceito de função, já que havia alunos raciocinando nos quatro níveis.

A nova atividade foi composta por 05 questões, algumas com subitens, totalizando 24 itens a serem respondidos. Os 24 itens foram classificados de acordo com a descrição proposta da seguinte maneira:

- 05 itens característicos de Nível 1;
- 07 itens característicos de Nível 2;
- 06 itens característicos de Nível 3;
- 06 itens característicos de Nível 4.

Vale ressaltar que alguns itens poderiam ser respondidos em níveis diferentes de acordo com raciocínio usado pelo aluno.

Para classificar os alunos nos níveis propostos, seguimos o modelo de Jaime & Gutierrez (1990), para um aluno ser considerado em um determinado nível, o mesmo deve ter acertado pelo menos 60% das questões referentes a este nível e 60% das questões de níveis anteriores. Assim, foi estabelecida a seguinte classificação:

- um aluno foi considerado de nível 1 se acertou pelo menos 60% dos itens de nível 1;

- um aluno foi classificado no nível 2 se acertou pelo menos 60% dos itens de nível 2 e 60% dos itens de nível 1;

- um aluno foi considerado de nível 3 se acertou pelo menos 60% dos itens de nível 3 e 60% dos itens de níveis 1 e 2 ;

- um aluno foi classificado no nível 4 se acertou pelo menos 60% dos itens de nível 4 e 60% dos itens de níveis 1, 2 e 3.

Como algumas dessas porcentagens forneceram resultados não inteiros, utilizamos como a quantidade de itens o primeiro inteiro superior ao resultado obtido. Dessa forma, chegamos aos números mínimos de acertos, mostrados na tabela 1.

Tabela 1- Número mínimo de acertos em cada nível

Número mínimo de acertos em itens de cada nível				
	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4
Nível 1	3			
Nível 2	3	4		
Nível 3	3	4	4	
Nível 4	3	4	4	4

Fonte: elaboração própria

Seguindo essa classificação, os 29 estudantes envolvidos foram classificados de acordo com a distribuição mostrada na tabela 2.

Tabela 2- Número de alunos classificados por nível.

	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4
Número de alunos	7	3	9	10

Fonte: elaboração própria

7 Validação da escala proposta

A seguir, faremos uma breve descrição do padrão de resposta em cada nível, para algumas questões da atividade. A figura 1 mostra o enunciado da primeira questão da atividade.

Questão 1

Considere a função $f(x)=\frac{x-4}{2}$.

a) Esboce o gráfico dessa função, considerando como domínio o conjunto
A = { -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}

b) Esboce o gráfico dessa função, considerando como domínio o conjunto dos números reais.

Figura 1 – Primeira questão da atividade para validação da escala
Fonte: elaboração própria

Esta questão poderia ser respondida no nível 1 ou no nível 2. Seu objetivo é verificar se os estudantes reconhecem o domínio de uma função e sabem diferenciar domínio discreto de domínio contínuo. Consideramos como de nível 1 as respostas dos alunos que no item (a) reconheceram o domínio.No entanto, ligaram os pontos como se o conjunto A fosse o intervalo [-2,4] ou que não distinguiram os itens (a) e (b).Consideramos como respostas de nível 2 as respostas de alunos que resolveram corretamente a questão, distinguindo os domínios discreto do item (a) e contínuo do item (b). Todos os alunos responderam este item de alguma das formas descritas a seguir.

7. 1 Respostas Obtidas

Alunos no 1º nível: no item (a) utilizaram uma tabela para encontrar o valor de y correspondente a cada x do domínio, em seguida marcaram os pares ordenados no plano cartesiano. Entretanto, alguns alunos equivocaram-se ao ligar esses pontos, já que o domínio era discreto. Confusão entre domínio discreto e contínuo são comuns a alunos de nível 1. Já no item (b) repetiram o mesmo gráfico do item anterior, mas como neste caso o domínio é contínuo, a resposta estava correta.

Alunos no 2º nível: segundo nossa classificação, estes são capazes de distinguir domínio discreto de contínuo, no entanto, isso não significa que todos os alunos neste nível tenham alcançado tal habilidade. O fato de um aluno raciocinar em níveis subsequentes ao resolver tarefas distintas é uma característica dos níveis estabelecidos originalmente por van Hiele.

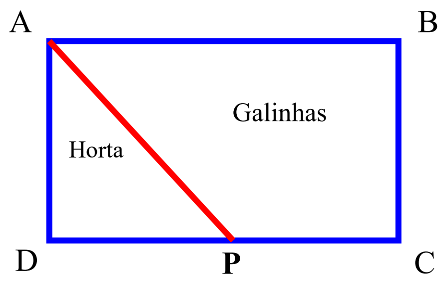
Alunos no 3º nível: um aluno classificado neste nível respondeu da mesma forma, o que sugere que a distinção de domínio discreto/contínuo é de grande dificuldade para os alunos. Os outros 08 participantes classificados no 3º nível responderam corretamente a ambos.

Alunos no 4º nível: Todos os alunos classificados em nível 4 solucionaram este item da forma esperada.

A figura 2 mostra uma questão da atividade, cujas respostas abrangeram todos os níveis da escala proposta para o conceito de funções.

Questão 2

O dono de um sítio, de forma retangular de dimensões 4 m por 8 m, divide seu terreno de modo a poder criar galinhas e cultivar hortaliças durante o ano todo. Para isso, ele fixou uma estaca num dos cantos do terreno (A) e ali prendeu uma das pontas de um rolo de tela, fixando a outra ponta numa estaca que fica num ponto qualquer (P) do lado oposto (CD). Conforme a sua necessidade, durante o ano, ele varia a localização desta ponta da tela que é móvel, ou seja, a do ponto P, sempre sobre CD.



O retângulo ao lado representa a situação da divisão das regiões de utilização do sítio.

Considere as medidas dos lados CD = 8 m e BC = 4 m. Lembre-se, o ponto P, sua posição varia do ponto D até o ponto C.

O terreno da horta tem o formato de um triângulo retângulo. Lembre-se que a medida da área de um triângulo é expressa por: $A = \frac{b.h}{2}$.

a) Desenhe, no retângulo, a região da horta ADP para o caso em que P esteja 3m do ponto D. Pinte esta região.

b) Qual a medida da área da horta com essas dimensões?

c) Represente a distância D a P pela letra d e execute as instruções acima para os valores escritos na tabela:

Distância d(m)	Expressão da área da horta	Área da horta (m^2)

Sugestão: Represente a horta para cada valor de d no retângulo desenhado no item a

d) Pode-se construir hortas no formato indicado para valores de d abaixo?

D=0,1m; d=0m; d=8m; d=$\sqrt{2}$ m

e) Quais os valores inteiros que d pode assumir? Quais os valores que d pode assumir?

f) A medida da área da horta depende do valor d? Justifique

g) Qual o valor de d correspondente a horta de maior área?

h) Dê uma expressão para a medida da área da horta ADP em função de d.

i) Esboce o gráfico que representa a situação descrita pelo problema

j) Qual a posição do ponto P para que a medida da área da horta seja $5m^2$? E $7{,}4m^2$?

k) Qual a posição do ponto P para que a medida da área da horta seja $5m^2$? E $7{,}4m^2$?

l) A área da horta ADP aumenta ou diminuiu quando o ponto P se aproxima do ponto C?

m) Que função o gráfico representa?

Figura 2: Questão da atividade para validação da escala
Fonte: elaboração própria

Esta questão era composta de subitens que abrangem todos os níveis de raciocínio. Vamos analisar inicialmente o item (e), classificado no Nível 2. Seu objetivo era verificar se o aluno é capaz de diferenciar domínio discreto de domínio contínuo e de reconhecer possíveis pontos da imagem.

7.2 Respostas obtidas para o item (e):

Alunos no 1º nível: dos 07 alunos em nível 1, apenas dois responderam corretamente, dois deixaram em branco e três modificaram a questão para: Quais os valores inteiros que d pode assumir? Quais os valores que d **não** pode assumir? Acreditamos que estes alunos fizeram essas modificações, pois o item anterior perguntava:

"*Pode-se construir hortas no formado indicado para valores de d: d = 0,1m; d = 0m; d = 8m; d=* $\sqrt{2}$ *m?"*

Estes alunos interpretaram como quais os valores dentre os apresentados no item anterior não poderiam ser possíveis. Alunos no 1º nível identificam as variáveis da função, entretanto, ainda não é característico desse nível identificar os possíveis elementos do domínio, nos casos contínuo ou discreto.

Alunos no 2º nível: dos alunos classificados neste nível, apenas um respondeu corretamente, percebendo a diferença na pergunta, que a primeira parte se referia a um conjunto discreto e a segunda pergunta a um conjunto contínuo. Os demais responderam apenas a primeira parte da questão.

Alunos no 3º nível: Neste nível ainda percebemos confusão entre as perguntas, dos 09 alunos classificados neste nível 5 responderam corretamente enquanto quatro responderam apenas para domínio discreto.

Alunos no 4º nível: Os alunos de nível 4 responderam corretamente.

A seguir, vamos analisar o item (h) da questão acima, cuja resposta requeria raciocínio no Nível 3, já que pedia a determinação da expressão analítica da função.

7.3 Respostas obtidas para o item (h):

Alunos no 1º nível: nenhum dos alunos do 1º nível acertou essa questão, todos deixaram em branco. Alunos no primeiro nível ainda não adquiriram a habilidade de determinar a expressão analítica de uma função a partir das informações obtidas nos enunciados.

Alunos no 2º nível: dos alunos desse nível, apenas um forneceu corretamente a expressão $\frac{d \text{ x } 4}{2}$, sem simplificar, um participante deixou em branco e a outra resposta obtida foi: $A = \frac{d \text{ x} \overline{DA}}{2}$, mesmo sabendo que o valor de $\overline{DA}$ é sempre igual a 4. Tal resposta indica transição entre os dois primeiros níveis.

Alunos no 3º nível: todos apresentaram corretamente como resposta a expressão $A(d) = 2d$, já que no 3º nível os alunos são capazes de fornecer a expressão analítica da função. Podemos notar uma grande diferença na notação usada por um aluno no nível 3 para as respostas obtidas no 2º nível. Estes alunos perceberam que o valor da altura era constante, e não apenas substituíram tal valor na expressão, como também a simplificaram, além de utilizar a notação $A(d)$ para indicar a relação de dependência da função.

Alunos no 4º nível: Os alunos de nível 4 responderam corretamente, sem dificuldades e com o mesmo padrão de resposta apresentado pelos alunos do 3º nível.

Vale ainda analisar as respostas dadas à questão mostrada na figura 3, classificada no 4º Nível da escala, pois tinha como objetivo verificar se o aluno é capaz de operar com funções.

Questão 3

Uma função f é par se e somente se $f(x) = f(-x)$ para todo x de seu domínio.

Uma função f é ímpar se e somente se $f(x) = -f(-x)$ para todo x de seu domínio.

Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é par e a função $g(x) = x^3$ é ímpar.

Considere, agora, a função h definida por $h(x) = f(x) + f(-x)$.

Decida se é verdadeira ou falsa a afirmação abaixo, justificando sua resposta.

Se f é uma função par e $f(x)$ é um número inteiro, então $h(x)$ é um número par.

Figura 3: Questão classificada no 4º nível da escala proposta
Fonte: elaboração própria

7.4 Respostas obtidas:

Alunos no 1ºnível: Nenhum dos alunos do 1ºnível fez essa questão, todos deixaram em branco, já que nesse nível eles ainda não conseguem identificar funções obtidas como resultado de operações com funções.

Alunos no 2ºnível: apenas um dos alunos respondeu corretamente, no entanto, não justificou o que indica que este participante chutou a resposta.

Alunos no 3ºnível: a maioria dos alunos deixou esse item em branco, e os que responderam não apresentaram justificativa.

Alunos no 4ºnível: apenas um aluno classificado no 4º nível não respondeu a este item. Os demais acertaram, justificando que se a função f(x) é par então f(x) = f(-x) e que a soma de dois números iguais é sempre um número par.

8 Considerações finais

A teoria de van Hiele para o pensamento geométrico tem servido como modelo para a elaboração de materiais escolares e de atividades geométricas, uma vez que estabelece níveis hierárquicos para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Vale lembrar que, de acordo com essa teoria, o progresso nos níveis de pensamento geométrico depende mais do ensino que apenas da idade ou maturidade dos estudantes. Portanto, o professor exerce um papel preponderante no progresso dos alunos na aprendizagem de geometria.

Este artigo é baseado numa pesquisa de mestrado (Cardoso, 2016), inspirada nos trabalhos desenvolvidos por Isoda (1996) e por Bergeron & Hercovics (1982), que descrevem níveis hierárquicos para a linguagem de funções. Trata-se de uma tentativa de criar um modelo, do tipo de van Hiele, para o tópico de função. Nossa pesquisa foi realizada com alunos dos três anos do Ensino Médio de duas escolas públicas e uma particular no Rio de Janeiro, com o objetivo de relatar o processo de testagem e validação da escala de níveis para funções, pensada para a realidade brasileira, proposta por Cardoso (2016).

Os resultados indicam que a escala proposta é válida, já que os alunos foram distribuídos por todos os níveis, obedecendo a uma hierarquia, que é característica essencial dos modelos que serviram de base para a pesquisa.

A expectativa é que o modelo proposto pode facilitar o trabalho do professor do Ensino Médiona tarefa de ajudar os alunos a construir o conceito de função, com todas as suas particularidades e variedade de representações. Acreditamos que essa proposta de níveis atende a estas necessidades e poderá contribuir efetivamente para a apropriação do saber matemático no tópico de funções por parte dos alunos.

Referências

Armah, R. B. & Kissi, P. S. (2019). *Use of the van Hiele Theory in Investigating Teaching Strategies used by College of Education Geometry Tutors.* Eurasia Journal of Mathemaics, Science and Technology Education, 15 (4), p. 1-13.

Bergeron, J. & Hercovics N. (1982). *Levels in the understanding of functions concept*. Proceedings of the Workshop of Functions.Enschede, The Netherlands.

Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). *Characterizing the van Hiele Leves of development in geometry*. Journal of Research in Mathematics Education, vol 17, No. 1, p. 31-48.

Cardoso, E. (2016). *Uma Proposta de Níveis de Aprendizagem para o Tópico de Funções no Ensino Médio.* Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Rio de Janeiro: PEMAT, UFRJ, retirado em: 23 de março de 2019 de: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/76%20Eduarda%20Cardoso.pdf.

Cardoso, E. & Nasser, L. (2016). Adaptação da Teoria de Van Hiele para o Tópico de Funções no Ensino Médio. *Anais do XII ENEM*, São Paulo, SP.

Crowley, M. L. (1994). O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: Lindquist, M. M. & Shulte, A. P. *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo, p. 1-20, editor Atual.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced Mathematical Thinking. In: Tall, D. (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (Org). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. 4a ed. Campinas, SP. Papirus, p.11-33, 2003.

Duval, R.(2009). *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.* São Paulo: Editora Livraria da Física.

Even, R. (1990). *Subject matter knowledge for teaching: the case of functions*. Studies in Mathematics, v.21, p. 521-544.

Fuys, D.; Guedes, D. & Tischler, R. (1988). *The van Hiele model of Thinking in Geometry among adolescents.* JRME Monograph no 3. Reston , VA: NCTM.

Gutierrez, A. & Jaime, A. (1987). *Estudio de las caracteristicas de los niveles de van Hiele*. Proceedings of the 11th PME conference, vol 3, p. 131 – 7. Montreal.

Gutierrez, A; Jaime, A. & Fortuny, J. M,(1991). *An alternative paradigma to evaluate the acquisition of the van Hiele levels*. The Journal for Research in Matemathics Education, vol 22, No 3, p. 237 – 251. Montreal.

Isoda, M. (1996). *The Development of Language about Function: An Application of Van Hiele'sLevels.* PME 20, Valencia, Espanha, vol.3, p.105-112.

Jaime A & Gutierrez, A. (1990). *Study of the degree of acquisition of the van Hiele level in secondary school student*s. Proceedingsof PME 14, vol. 2,p. 251 – 259, Oaxtepec, México.

Nasser, L. (1992). *Using the van Hiele Theory to Improve Secondary School Geometry in Brazil.* Tese de doutorado apresentado na Universidade de Londres.

Nasser, L. (1993). *A Teoria de Van Hiele para o Ensino de Geometria – Pesquisa e Aplicação.* Rio de Janeiro*:* UFRJ.

Nasser, L.; Biazutti, A.; Torraca, M.; Barros, J. & Vaz, R. (2019. *Investigando Estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I.* Anais do XV CIAEM, Medelin, Colômbia.

Oliveira, H. B. L. (2010). *Introdução ao Conceito de Função para Deficientes Visuais com o Auxílio do Computador*. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Rio de Janeiro: PEMAT, UFRJ, retirado em: 23 de março de 2019 de: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/20%20Heitor%20Oliveira.pdf

Passos A., Buriasco R. & Soares M. (2019). *Ideias de Van Hiele e Educação Matemática Realística: algumas aproximações.* Bolema, Rio Claro (SP), v. 33, n. 65, p. 1533-1548.

Pinto, C. F. (2014). *Dissertações brasileiras sobre o ensino de função afim, a partir da implementação de sequências didáticas, produzidas no período de 2009 a 2012: questões para formação de professores e para pesquisa.* Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Rio de Janeiro: PEMAT, UFRJ, retirado em: 23 de março de 2019 de: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/59%20Carolina%20Pinto.pdf

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*, Tese de Doutorado, São Paulo: FE-USP.

Sant´Anna, N. F. P. (2001). *Aplicação da teoria de Van Hiele no acompanhamento da mudança curricular no ensino médio no colégio Pedro II*, dissertação de mestrado, PUC-Rio.

Shaughnessy, J. M. & Burger, W. F. S.(1985). *Prior to Deduction in Geometry*. Mathematics Teach, 78, p. 411-418.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E. &Harel, G (Ed.) *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy*. MAA Notes, p. 25-58.

Tall D. (1982). (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

USISKIN, Z. (1982). *Van Hiele Leves and achievement in secondary school geometry*. Columbus, OH: ERIC.

Van de Walle, J. A.; Karp, K. & Williams, J. M. B. (2010). *Elementary and Middle School Matematics: Teaching Developmentally*. - 7th ed., Boston: Pearson.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight*. Orlando, FL: Academic Press.

Vinner, S. (1991). The hole of definitions in the teaching and learning of Mathematics.Em: Tall, D. (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking* Publishers.