Uma viagem sob o olhar de um geômetra

Resumo: Neste artigo apresenta-se uma pesquisa qualitativa de cunho teórico, cujo objetivo foi analisar o olhar do geômetra formador ao realizar uma viagem, observar determinados fatos, objetos, cenários, etc. e associá-los a conteúdos matemáticos. A partir dessas observações e dos registros coletados, buscou-se visualizar em que medida conteúdos específicos de Geometria podem ser conectados a outros de Matemática. Foram realizadas quatro incursões: a primeira conectou as cúspides do Cálculo com a fachada de um edifício; a segunda visualizou uma cobertura atípica de uma casa em forma cônica; a terceira evocou Gauss e sua curvatura gaussiana na visualização das linhas decorrentes do degelo do Monte Aconcágua e, finalmente, a quarta comparou a parábola e a catenária em um pórtico de acesso a uma cidade. As conexões estabelecidas fornecem indicativos de possibilidades didáticas de uso de Geometria para formação de professores de Matemática e são amparadas teoricamente.

Palavras-chave: Visualização. Geometria. Cúspide e catenária. Curvatura gaussiana e média. Educação geométrica.

José Carlos Pinto Leivas
Doutor em Educação (UFPR). Professor da Universidade Franciscana (UFN). Rio Grande do Sul, Brasil.
orcid.org/0000-0001-6876-1461
leivasjc@gmail.com

A trip under the eyes of a geometer

Abstract: This article presents a qualitative research of a theoretical nature, whose objective was to analyze the view of the forming geometer when making a trip, observing certain facts, objects, scenarios, etc. and associate them with mathematical content. Based on those observations and the collected records, we sought to visualize the extent to which specific Geometry content can be connected to others in Mathematic. Four incursions were made: the first connected the cusps of the Calculus with the facade of a building; the second visualized an atypical roof of a house in a conical shape; the third evoked Gauss and his Gaussian curvature in visualizing the lines resulting from the melting of Mount Aconcagua and, finally, the fourth compared the parable and the catenary in a portico to access a city. The established connections provide indicative of didactic possibilities of using Geometry for the formation of Mathematics teachers and are supported theoretically.

Recebido em 09/03/2020
Aceito em 30/03/2020
Publicado em 02/04/2020

eISSN 2675-1933
10.37853/pqe.e202007

Pesquisa e Ensino

Keywords: Visualisation. Geometry. Cusp and catenary. Gaussian and average curvature. Mathematics education.

Un viaje bajo la mirada de un geómetra

Resumen: En este artículo, se presenta una investigación cualitativa, de naturaleza teórica, cuyo objetivo fue analizar la mirada del geómetra formador al hacer un viaje, observar ciertos hechos, objetos, escenarios y asociarlos con contenidos matemáticos. A partir de estas observaciones y los registros recopilados, se realizó un análisis en la visualización de algunos contenidos de Geometría que pueden conectarse a otros en Matemáticas. Se hicieron cuatro incursiones: la primera conectó las cúspides del cálculo con la fachada de un edificio; el segundo visualizó un techo atípico de una casa en forma cónica; el tercero evocó a Gauss y su curvatura gaussiana al visualizar las líneas resultantes de la fusión del monte Aconcagua y, finalmente, el cuarto comparó la parábola y la catenaria en un pórtico para acceder a una ciudad. Las conexiones establecidas proporcionan indicativos de posibilidades didácticas de uso de la Geometría para la formación de profesores de Matemáticas y son amparadas teóricamente.

Palabras clave: Visualización. Geometría. Cúspide y catenaria. Curvatura gaussiana y media. Educación geométrica.

1 Introdução

É frequente se escutar que a Geometria está em toda parte. No entanto, o que se pode observar é que tal constatação não vai além da possibilidade de certa forma geométrica ser visualizada pelo olho humano. O próprio professor de Matemática que, algumas vezes, profere tal ideia, parece querer justificar o ensino dessa área do conhecimento por razões como a de que ela é abandonada ou dificilmente aceita pelos alunos e, até mesmo, pelos professores. Talvez, isso seja pela forma axiomática como ela é ensinada nos cursos de formação de professores de Matemática.

Essa forma de apresentar a Geometria ainda perdura em tempos atuais. Ao que tudo indica, isso decorre da organização dessa área por Euclides, na Antiguidade. Davis & Hersh (1995, p. 26) assim se manifestam a respeito:

> mas a geometria, se ensinada segundo o esquema apresentado por Euclides em 300 a. C., possui uma faceta crucialmente significativa. É ser apresentada como uma ciência dedutiva. Partindo de um número de ideias elementares tidas como óbvias, e tendo por base algumas regras bem definidas de manipulação lógica e matemática, a geometria euclidiana desenvolve uma estrutura de deduções de crescente complexidade.

Por sua vez, estudiosos abordam a 'descoberta' das Geometrias Não-Euclidianas, ao que o autor deste artigo contrapõe com a ideia de 'criação', a exemplo do que ocorreu com a organização da Euclidiana, por Euclides. Percebe-se que, ao buscar uma demonstração do V Postulado de Euclides – o das paralelas, pelo caminho da negação da existência de uma única, o corpo axiomático construído levou aos modelos de Geometria Hiperbólica (existência de mais de uma paralela) e ao de Geometria Riemanniana (a esférica é uma delas, onde há inexistência de paralelas).

A partir disso, pôde-se perceber a existência de outras geometrias além da Euclidiana, ainda que tais perspectivas nem sempre sejam levadas em consideração no ambiente escolar e acadêmico. A pesquisa de Leivas (2009) indicou a ausência de Geometrias Não-Euclidianas nos currículos da formação de professores de Matemática no Rio Grande do Sul. Ainda, sobre a existência de outras geometrias, como as atuaisfractal, topológica, diferencial, dinâmica, etc., Eves (1969, p. 355) faz o seguinte questionamento: "Qual é a geometria verdadeira?"[1] (tradução do autor). Ele explica que o significado dessa pergunta é análogo ao questionamento de qual geometria descreve mais adequadamente o espaço físico. Além disso, responde que:

> devido à confusão, obviamente complexa, de espaço e matéria, há razões para acreditar que pode ser impossível determinar, por experimentos físicos, se nosso espaço é euclidiano ou não euclidiano. As medições incluem suposições físicas e geométricas; um resultado observado pode ser explicado de várias maneiras, simplesmente fazendo alterações compensatórias adequadas em nossas supostas qualidades de espaço e matéria"[2]. (p. 356, tradução do autor).

Como cita Eves (1969), embora seja impossível determinar o espaço em que se vive, o papel do geômetra, ao observar o mundo que o cerca, é de extrema relevância na

---

[1] ¿Cuál es la geometría verdadera?

[2] Debido al embrollo evidentemente intrincado del espacio y de la materia, hay razones para creer que puede ser imposible determinar por experimentos físicos si nuestro espacio es euclidiano o no euclidiano. Las mediciones comprenden suposiciones tanto físicas como geométricas, un resultado observado puede explicar-se de muchas maneras, simples mente haciendo, cambios compensadores adecuados en muestras cualidades supuestas del espacio y de la materia.

formação de professores de Matemática. Justifica-se, portanto, o presente artigo,o qualteve por objetivo **analisar o olhar do geômetra formador ao realizar uma viagem, observar determinados fatos, objetos, cenários etc. e associá-los a conteúdos matemáticos.** Conteúdos como Cálculo Diferencial, Geometria Analítica e Geometria Espacial, por exemplo, constantes do currículo de Licenciaturas em Matemática, às vezes não satisfazem aos anseios dos estudantes quanto a possíveis aplicações na vida cotidiana, deixando a sensação de que são estudados apenas para o cumprimento do programa. Tendo em vista que irão atuar como professores nos diversos níveis, em geral, quando chegam à sala de aula não encontram argumentos para responder aos alunos sobre aplicabilidade de certos conceitos como, por exemplo, o de derivada ou de curvatura de superfícies irregulares.

2 Desenvolvimento

Este artigo trata de uma pesquisa teórica qualitativa, no sentido apontado por Denzin & Lincoln (1994, p. 1): “a pesquisa qualitativa é um campo de investigação por si só. Ela atravessa disciplinas, campos e assuntos. Uma família complexa e interconectada de termos, conceitos e suposições em torno do termo pesquisa qualitativa”[3] (tradução do autor).

Como o autor-investigador atua em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, tem a preocupação de conectar a Geometria, a qual se dedica há várias décadas, com outras áreas da Matemática, visando dar subsídios a professores em ação continuada sobre possibilidades de inserção no ensino e, dessa forma, contribuir para a Educação Matemática. Atualmente, o pesquisador tem explorado o recurso de registros fotográficos nos lugares por onde passa e ‘visualiza’ alguma geometria em algo que se lhe apresenta. Para o presente artigo, foram escolhidos registros realizados em janeiro de 2020, em uma viagem realizada no trajeto Rio Grande do Sul (Brasil) – Mendoza (Argentina).

[3] Qualitative research is a field of inquiry in its own right. It crosscuts disciplines, fields, and subject matter. A complex, interconnected family of terms, concepts, and assumptions sourround the term qualitative research.

Em geral, visualizar, no dicionário e para as pessoas, consiste em perceber um objeto ou cena pelo sentido da visão. Entretanto, se entende visualização como "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos" (Leivas, 2009, p. 22). Com essa concepção, ao localizar uma imagem, o visual se conecta a um conceito matemático e, de imediato, o construto mental geométrico é associado a ambos,de modo que se pode fechar os olhos e 'visualizar' Geometria e Matemática.

Visualização é um tema atual nas pesquisas do autor, ancorada em outros como Fischbein (1987, p. 104), para quem:

> representações visuais não somente auxiliam na organização da informação em representações como constituem um importante fator de globalização. Por outro lado, a concretude de imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto-evidência e imediatez. Uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios.

O apoio de uma imagem visual, além de organizar dados significativamente, também desperta no observador o sentimento criativo de ordenar dispositivos antecipatórios geométricos/matemáticos. Esses aparatos conceituais podem permitir uma compreensão efetiva de que a Geometria não consiste apenas nos processos de medição de terras pela invasão do Nilo, por exemplo, como consta, em geral, nos livros de História da Geometria/Matemática.

A respeito da imaginação, considera-se essa habilidade fundamental para que se possa explorar os aspectos visuais, intuitivos e criativos, a fim de poder detectar uma imagem e, quase instantaneamente, capturá-la por vislumbrar a conexão viável. Nessa direção, Hilbert & Cohn-Vossen (1932, p. iii) expressam, já no início de sua obra magnânima *Geometryand Imagination*:

> neste livro, é nosso objetivo dar uma apresentação da Geometria, tal como está hoje, em seus aspectos visual e intuitivo. Com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço

geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos com cálculos reais.[4]

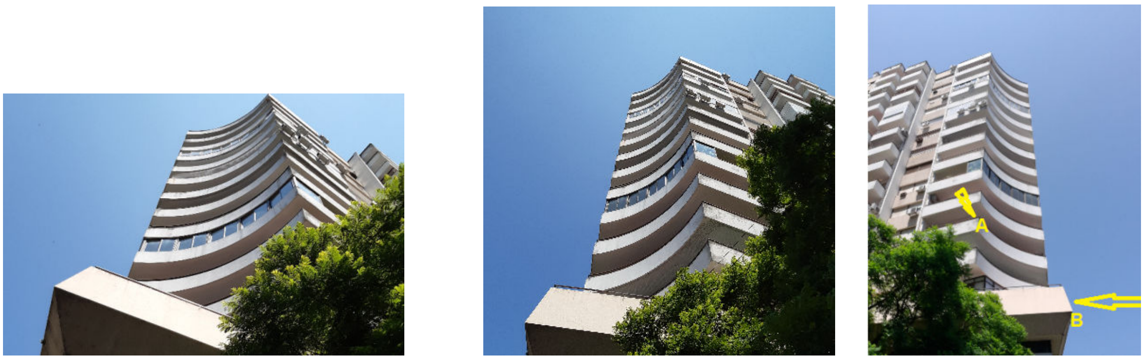
O presente artigo vai na direção apontada pelos investigadores, na medida em que seu autor tem buscado demonstrar, em sua prática profissional, possibilidades de um novo fazer na Educação Geométrica/Matemática. Em outras palavras, o autor tem se empenhado em desmistificar a inacessibilidade do ensino de Geometria em decorrência de sua natureza axiomática e de difícil aprendizagem, de acordo com alguns professores.

Corrobora a isso o fato dos professores de disciplinas de Cálculo, por exemplo, não ilustrarem outras questões além do uso de fórmulas e a resolução de exercícios de rotina, como derivar ou integrar. Muitas vezes, os estudantes terminam uma graduação e sequer sabem interpretar o significado de uma derivada como a medida da inclinação da reta tangente a uma curva, a integral como possibilidade de cálculo de áreas de superfícies não regulares ou de volume de sólidos, entre outros aspectos. Na sequência, apresenta-se várias incursões em que o autor ilustra sua visão matemática/geométrica sobre algum cenário que foi observado no transcorrer de uma de suas viagens.

3 Uma primeira incursão

Como já foi abordado, o ensino de Cálculo, em geral, prioriza a aplicação de fórmulas, o que, para Skemp (2016), caracteriza-se como um tipo de compreensão instrumental, isto é, uma maneira de compreender que ocorre pelo uso de regra pela regra, sem fundamentação. Em contrapartida a esse tipo de compreensão, o autor denomina a compreensão relacional, a qual aborda o saber fazer e o porquê. A Figura 1 ilustra um edifício residencial no qual o viajante percebeu a possibilidade de estabelecer uma conexão interdisciplinar envolvendo Geometria e Cálculo, tendo feito os respectivos registros.

[4] In this book, it is our purpose to given a presentation of geometry, as it stands today, in its visual, intuitive aspects. With the aid of visual imagination we can illuminate the manifold facts and problems of geometry, and beyond this, it is possible in many cases to depict the geometric outline of the methods of investigation and proof, without necessarily entering into the details connected with the street definitions of concepts and with the actual calculations.



(a) (b) (c)

Figura 1 – Cúspides na construção civil
Fonte: registro do pesquisador

Ao observar a parte frontal do edifício (a), o geômetra viajante percebe algo diferenciado naquela construção em relação a outras conhecidas. Observa de outro ângulo e faz o registro (b). Em seguida, altera seu posicionamento, pois sua mente matemática logo vai ao ponto A, no registro (c), no qual percebe o encontro de três linhas, sendo duas delas retilíneas e a terceira curvilínea, ao contrário do que ocorre emoutros pontos, também no registro (c), em que concorrem três retilíneas.

A imaginação visual, como apontada por Hilbert & Cohn-Vossen (1932), leva o investigador a iluminar a aplicação do conceito de derivada. Anton (2000, p. 177-178), ao introduzir o item derivada, assim se expressa: "Na seção precedente, mostramos informalmente que a inclinação da reta tangente ao gráfico y=f(x) no ponto x_0 é dada por

$$m_{tg} - lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0}{x_1 - x_0} \text{''.}$$

Na sequência, faz algumas transformações para, em seguida, obter uma segunda fórmula e a definição a seguir:

> se P(x_0, y_0) é um ponto no gráfico de uma função f, então a reta tangente ao gráfico de f em P, também chamada reta tangente ao gráfico de f em x_0, é definida como sendo a reta que passa por P com inclinação
>
> $$m_{tg} = lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0}{h} m_{tg} = lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0}{h} ,$$
>
> contando que este limite exista. Se o limite não existir, então concordaremos que não há nenhuma tangente ao gráfico em P. (grifo do próprio autor).

Retomando-se a Figura 1 no ponto A e nos análogos a ele na estrutura do edifício, pode-se concluir que as retas tangentes, dessa perspectiva, apresentam inclinação diferente quando analisada em pontos muito próximos, à sua direita e à sua esquerda, o que no Cálculo se denomina ‘em uma vizinhança’. Nota-se que o ponto A, da Figura 1, corresponde ao ponto P da definição supracitada. A Geometria Dinâmica permite que se defina duas dessas retas tangentes em um ponto (Figura 2).

Figura 2 – Retas tangentes em cúspides
Fonte: registro do pesquisador

A Figura 2 foi transportada do arquivo do pesquisador para o GeoGebra, ilustrando a tangente à esquerda e à direita (reta s)do ponto P_1. O software fornece, na janela algébrica, as equações dessas duas retas:

r: y=0,25x + 2,5, enquanto s: y= -1,26x + 8,96.

Portanto, a primeira tem uma inclinação igual a 0,25 ou uma declividade de 14 graus, enquanto a segunda tem inclinação de -1,26 ou declividade de 129 graus. Percebe-se, assim, uma acentuada variação nas proximidades do ponto ao qual estão definidas as duas tangentes, ou seja, não há uma passagem suave de uma a outra na vizinhança daquele tipo de ponto.

O leitor deve estar se perguntando o porquê disso, ao que se responde: para compreender a definição geométrica de derivada em um ponto. Anton (2000) define a derivada a partir da fórmula supracitada, isto é, sempre que houver a existência do limite, o cálculo da inclinação da reta tangente em um ponto deverá levar em consideração a aplicação da fórmula em questão. No entanto, não se percebe, explicitamente, na própria definição, que para a derivada da função existir naquele ponto, as duas retas tangentes deveriam coincidir, ou seja, a inclinação e a declividade deveriam ser iguais, o que geraria uma variação suave na passagem ou na proximidade do ponto.

Nessa primeira incursão, esboçamos uma possibilidade de conectar geometricamente o conceito de derivada com inclinação e declividade de retas tangentes a uma curva, buscando induzir os estudantes a perceberem que não basta aplicar fórmulas (compreensão instrumental), mas saber os porquês destas existirem (compreensão relacional). Tal abordagem vai além do que Davis & Hersh (1995) apontaram a respeito de uma geometria que é muito mais do que a apresentada por Euclides, vista como processo dedutivo ou, ainda, apenas para medições. Visualização, portanto, é imprescindível na formação do indivíduo para os enfrentamentos e observações do mundo físico.

4 Uma segunda incursão

Antes de iniciar a segunda incursão pelos caminhos do geômetra, reflete-se sobre o significado de raciocínio na aprendizagem em Geometria, essa considerada a partir de um contexto. De acordo com Hershkowitz (1998, p.32) há duas tendências nessa direção:

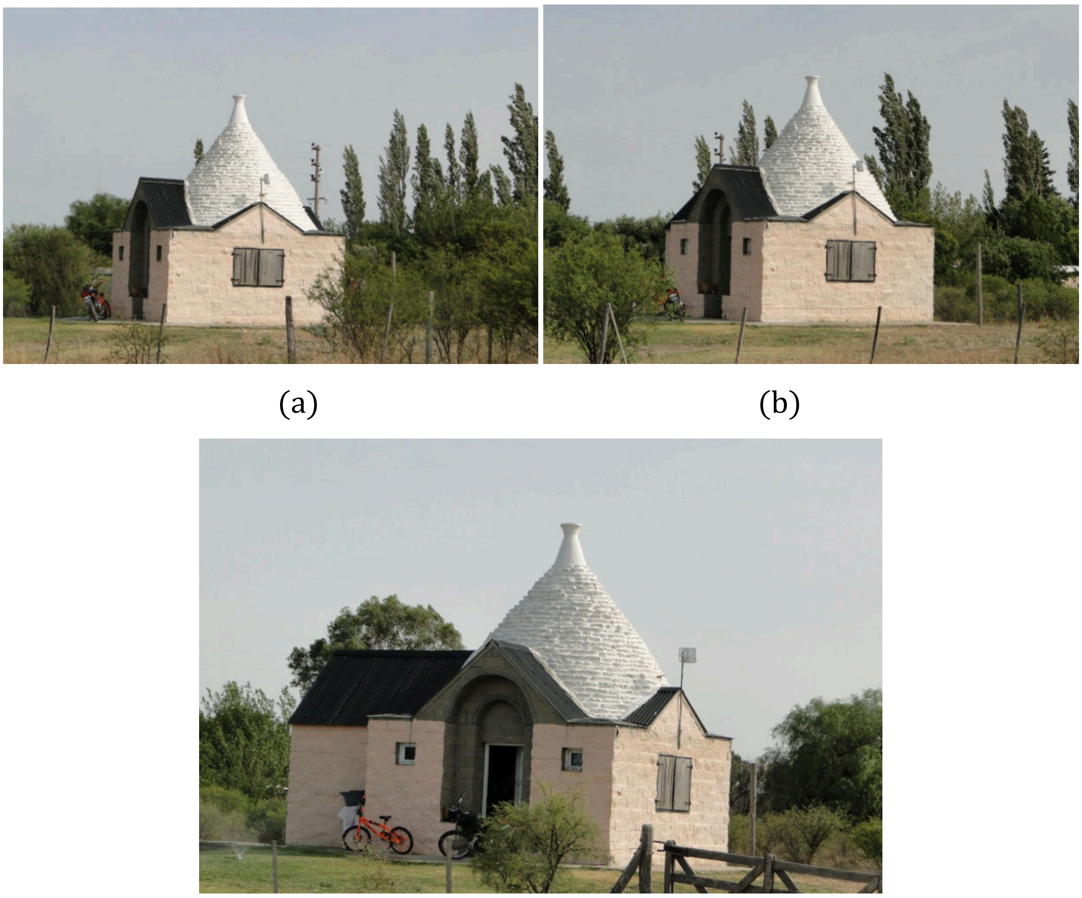
> a atividade de aprendizado em ambientes de geometria dinâmica é uma tendência que demonstra a 'democratização' do raciocínio no aprendizado de geometria. Uma segunda tendência é o que é chamado de raciocínio na aprendizagem de geometria a partir do contexto. De acordo com essa visão, o conhecimento geométrico pode e deve ser construído de maneira significativa em contextos que servem como "campos de experiência"[5] (tradução livre)

Do exposto, considera-se que a principal função do raciocínio é entender, explicar e convencer. Para a autora, Zimmerman & Cunningham (1991) indicam que, se por um

[5] The learning activity in dynamic geometry environments is one trend that demonstrates the 'democratization' of reasoning in geometry learning. A second trend is what is called reasoning in learning geometry from context. According to this this view, geometrical knowledge can and should be constructed in a meaningful way in contexts that serve as "fields of experience"

lado visualização em Educação Matemática está agora em seu renascimento, por outro lado poucos esforços parecem estar sendo investidos para implementá-la. Nessa direção, ao que tudo indica, a comunidade está ingenuamente assumindo que as pessoas nascem com habilidades visuais, as quais são aplicadas somente quando necessárias e, portanto, não necessitam ser desenvolvidas. Assim, fortalecem as pesquisas realizadas pelo autor do presente artigo que tem abordado o papel da visualização em Educação Matemática, particularmente, no ensino de Geometria na formação de professores de Matemática (Leivas, 2009, 2019, 2019a).

No trajeto para a província de San Luis, na Argentina, encontra-se o distrito de Nogoli, em uma rodovia com raríssimas construções. Surge uma extremamente incomum entre algumas árvores e arbustos, e o olhar do geômetra o faz respirar fundo e parar o carro para registro fotográfico (Figura 3).



(a) (b)

(c)

Figura 3 – Composição espacial
Fonte: registro do pesquisador

Ao primeiro olhar (Figura 3 (a)), foi percebida a cobertura atípica em comparação às construções residenciais urbanas, ou seja, no formato cônico, a partir de uma vista lateral. A aproximação (b) já ilustra outra configuração, agora da parte frontal da residência, com novos formatos (trapezoidal, por exemplo). Finalmente, o registro (c) demonstra a riqueza de formatos geométricos na composição da construção: superfície cônica, regiões retangulares e aproximadamente quadradas, triangulares, etc. Percebe-se,nas duas primeiras imagens,que o formato da janela se assemelha a uma região quadrada (a e b), enquanto que, ao mudar o ponto de vista do observador, não muda sua forma e suas dimensões, isto é, considerando-se as transformações visuais obtidas pelo observador, a figura se mantém a mesma, o que, na linguagem matemática significa uma 'transformação invariante'. Essa percepção do geômetra o conduz ao ramo da Geometria Projetiva (Courant & Robbins, 2000).

Aspectos visuais do geômetra viajante vão ao encontro do que Hershkowitz (1998) explicitou em termos de tendências para o ensino de Geometria, ou seja, uma democratização no seu aprendizado, pois, nesse contexto, é possível propiciar aos estudantes descobertas, quer pela observação direta, quer pela exploração de softwares de Geometria Dinâmica. Em um desses programas, a imagem pode ser inserida para a posterior exploração de suas propriedades, buscando elementos importantes de Geometria Plana e Espacial, como grandezas e medidas (comprimentos, áreas e volumes), a exemplo da Figura 4.

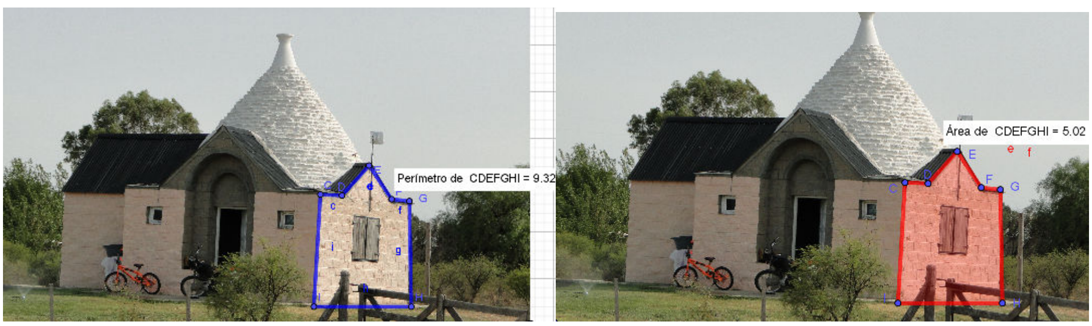


Figura 4 – Composição espacial
Fonte: registro do pesquisador

Essa incursão levou o autor do artigo a meditar sobre o desenvolvimento atual da matemática aplicada. Segundo Boero & Bussi (1998, p. 58), essa área mostra aplicações interessantes: "a perspectiva é usada em monitores para sistemas de computador (por exemplo, programas de treinamento cirúrgico; programas de design de instalações para controladores de tráfego aéreo); ligações são usadas em robótica"[6] (tradução livre). Portanto, oferece-se, com o que foi ilustrado neste item, uma possibilidade de desenvolver conteúdos geométricos por meio de uma atividade constante do mundo real, salientando a habilidade visual do construtor da obra analisada na Figura 4, o qual quiçá tenha frequentado os bancos escolares em níveis mais avançados.

5 Uma terceira incursão

O século XIX é rico em movimentação matemática, sendo que a França e, depois a Alemanha, projetaram-se de modo mais significativo nesse cenário, segundo Struik (1997). Evocamos, especialmente, o alemão Carl Friedrich Gauss, não apenas por seu papel fundamental na passagem da Matemática do século XVIII para o XIX mas também porque seus estudos vêm ao encontro dos propósitos deste artigo, principalmente no tocante à Geometria. Após o ano de 1820, o pesquisador se interessou pela geodesia e "a mais importante contribuição deste período da vida de Gauss talvez fosse a teoria das superfícies em Disquisition es general es circa superfícies curvas (1927), onde tratou do assunto de forma muito diferente daquela que foi utilizada por Monge" (Struik, 1997, p. 229).

Na direção apontada por Gauss, surge a denominada Geometria Intrínseca de uma superfície, na qual se estudam as coordenadas curvilíneas de uma superfície, por exemplo:a) as curvas e seus comprimentos por uma nova métrica não euclidiana; b) as geodésicas, que são as curvas que desempenham o papel das retas na Geometria Euclidiana; c) as superfícies e suas respectivas curvatura e área; etc.

Nessa 'viagem' do geômetra pela cordilheira dos Andes, na direção da fronteira da Argentina com Chile, após a passagem pelo Parque Aconcágua, ele rememora o

[6] [...] today's development of applied mathematics shows interesting applications: perspective is used in displays for computer systems (e.g surgical training programs; facilities design programs for air traffic controllers); linkages are used in robotics.

questionamento feito por Gauss a respeito de qual seria a curvatura de uma superfície (qualquer), uma vez que as curvaturas de curvas já eram proeminentes. Observa, então,as águas que, descendo das geleiras, demarcaram curvas na montanha, mesmo depois de cessar o degelo que, infelizmente, tem sido acelerado pelo aquecimento global, destruindo esse patrimônio da humanidade. A Educação Matemática pode, portanto, realizar atividades educacionais interdisciplinares que possibilitem reflexão a respeito.

Figura 5 – Degelo na Cordilheira dos Andes
Fonte: arquivo do pesquisador

O que dizem as Figuras 5? Na primeira, a chegada à trilha do desfiladeiro, a qual permite maior aproximação do Monte; na segunda, um conjunto de montanhas ao fundo; na terceira, uma geleira no cume de um desses montes; na quarta aparecem as marcas deixadas pela água do degelo que escorre montanha abaixo para formar os rios que darão vida ao meio ambiente.

Usualmente, em termos de geometria de superfícies, estudam-se áreas e volumes dos sólidos que são regulares, por exemplo: o volume de uma esfera; a área de uma superfície esférica, dentre outras, por meio de fórmulas que, quase sempre, são fornecidas aos estudantes para aplicações imediatas, correspondendo a uma compreensão instrumental, no sentido apontado por Skemp (2016).

Observa-se três superfícies distintas na Figura 6, sendo que, sobre cada uma delas, foram demarcadas duas curvas distintas. Na cilíndrica, tem-se a linha r, uma circunferência cuja curvatura é constante e igual ao inverso de seu raio, uma linha reta s, cuja curvatura é constante e igual a zero. A curvatura de uma superfície é dada pelo produto das curvaturas de duas de suas curvas, denominadas linhas de curvatura, sendo uma de curvatura mínima k_1 e a outra de curvatura máxima k_2. Assim, $K = k_1 . k_2$ (curvatura gaussiana, assim denominada devido a Gauss).

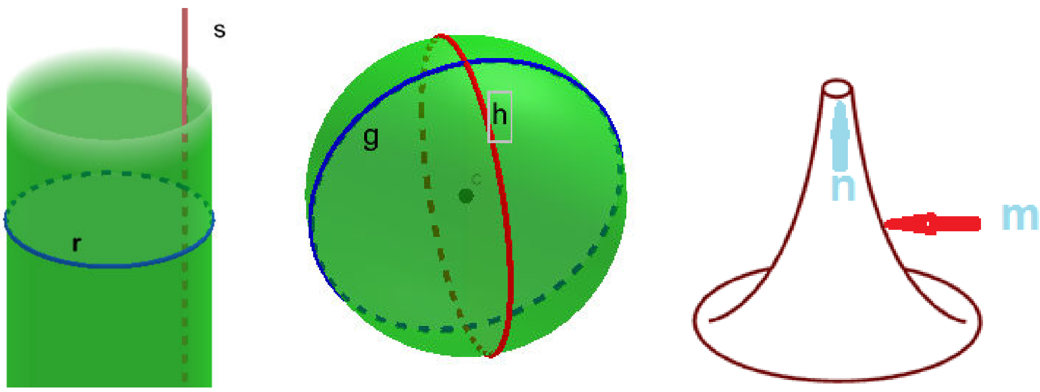


Figura 6 – Superfícies cilíndrica, esférica e pseudo-esférica
Fonte: arquivo do pesquisador

Na superfície esférica, as duas curvas g e h são circunferências máximas e, portanto, são constantes positivas. Por fim, a pseudoesfera tem uma curva com curvatura negativa, e a outra positiva (observa-se que elas se curvam em sentidos diferentes). Dessa forma, são três superfícies de curvatura gaussiana constante e, respectivamente, igual a zero, positiva e negativa.

Conta a História da Matemática que Gauss, sentado ao pé da montanha, observou que sempre havia duas linhas especiais que desciam de seu cume, as quais denominou linhas de curvatura mínima e máxima. A partir disso, caracterizou a curvatura de superfícies, como nas montanhas observadas e registradas pelo geômetra viajante (Figuras 5). Nestas, é possível observar as linhas deixadas pelo degelo, as quais vão se amoldando à curvatura do terreno.

A Geometria Diferencial é o ramo da Geometria que dá um tratamento do Cálculo Diferencial e Integral aliado à Geometria Analítica e à Álgebra Linear, por exemplo, permitindo conexões importantes entre as diferentes matérias curriculares. A curvatura de uma curva está diretamente associada à variação da primeira derivada da função que a define. O comprimento está relacionado à primeira derivada, o que permite parametrizar a curva pelo seu comprimento de arco. Assim, considera-se uma curva regular (sem cúspides) no espaço tridimensional,

$f(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t \in (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|f'(t)| \neq 0$, $\forall t \in (a,b)$.

O comprimento de arco dessa curva é dado por $s(t) = \int_a^b |f'(t)|dt$, a partir do que se pode parametrizar a curva tendo como variável o próprio comprimento do arco. No caso em que a curva esteja parametrizada pelo comprimento de arco, este equivale a $s=|b-a|$.

Nesse ramo, ocorre um aspecto importante para a aprendizagem de Geometria, isto é, a classificação de superfícies de curvatura gaussiana constante: plana (igual a zero), elíptica ou esférica (positiva) e hiperbólica (negativa). Nessa abordagem, é possível estudar o tópico correspondente ao quinto postulado de Euclides, a saber, o das paralelas.

Com esta terceira incursão do geômetra viajante, acredita-se ter ilustrado uma pequena passagem pelas geometrias Não-Euclidianas, de forma bastante superficial, porém estimulando algumas conexões didáticas da Geometria com outras áreas do conhecimento matemático e, até mesmo, com outras disciplinas. O autor deste artigo tem indicado a Geometria como uma didática para o ensino de Matemática, na medida em que ela pode servir de elemento desencadeador do processo de ensino em várias situações (Leivas, 2019). Na presente situação, buscou-se, de certa forma, envolver a compreensão relacional,em associação à instrumental (Skemp, 1993). Essa última é, frequentemente encontrada nos cursos de Cálculo e Geometria Analítica, dentre outros que costumam ser ofertados formação de professores de Matemática.

6 Uma quarta incursão

Não são raras as vezes que se nota estudantes e professores de Matemática observarem os fios elétricos ou telefônicos suspensos entre dois postes ao longo da rua e indicarem tratar-se de uma parábola. No entanto, tal curva é denominada catenária e tem por equação

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}})$$

em que a é um número real qualquer. Considerando-se a=-2, então, na Figura 7, a catenária está representada pela curva em preto, enquanto que a parábola $x^2 = - y + 2$, em vermelho.

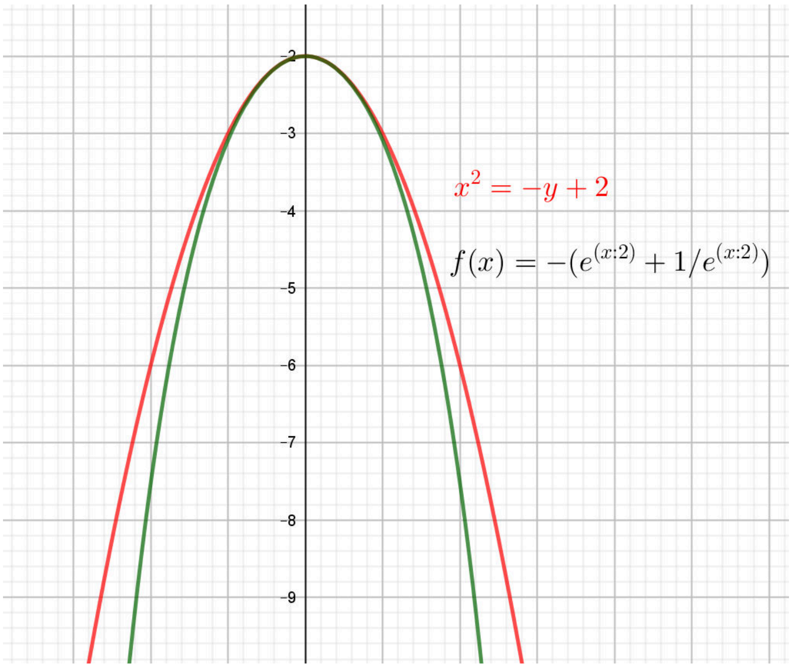


Figura 7 – parábola e catenária
Fonte: construção do autor no GeoGebra

Assim, as duas apresentam curvaturas diferentes, embora haja semelhança entre elas. Além disso, a parábola tem uma equação do segundo grau simples, a qual pode ser explorada nos últimos anos do Ensino Fundamental, enquanto que a catenária envolve a função exponencial, um pouco mais elaborada, adequada ao Ensino Médio.

De acordo com Eves (1969, p. 265), "se uma curva plana rola em outra fixa, também plana, todos os pontos fixos da curva descrevem uma roleta"[7]. Dentre as curvas desse tipo, tem-se a cicloide, talvez a mais conhecida. Outra curva dessa mesma

[7] si una curva plana rueda sobre otra fija, también plana, entonces todo punto fijo a la curva rodante describe uma ruleta.

categoria é aquela obtida pelo foco de uma parábola que rola sobre uma reta fixa, também designada como catenária, ou seja, [...] “a curva cuja forma assume uma corda de densidade perfeitamente flexível, inextensível e uniforme, que se pendura em dois suportes não localizados na mesma vertical”[8] (p. 265).

Além desse argumento, outro que levou o geômetra à visualização da catenária é o fato dela ser a curva plana, cuja rotação em torno de um eixo gera a superfície denominada catenoide. Segundo Thorpe (1978, p.161), [...] “O argumento acima mostra que cada superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ que pode ser obtida girando o gráfico de uma função suave em torno do eixo é uma porção de uma catenóide”[9]. As superfícies mínimas são as que apresentam curvatura média nula, a exemplo daquela obtida nas bolhas de sabão. No momento em que as tensões e as deformações se equilibram, ou seja, se anulam, tem-se ali uma curvatura principal negativa e outra positiva e, portanto, a média é nula, por isso são denominadas superfícies mínimas.

Mas o que levou o geômetra a se interessar pelo arco de acesso à cidade de Leones, ainda na Argentina? (Figura 8).

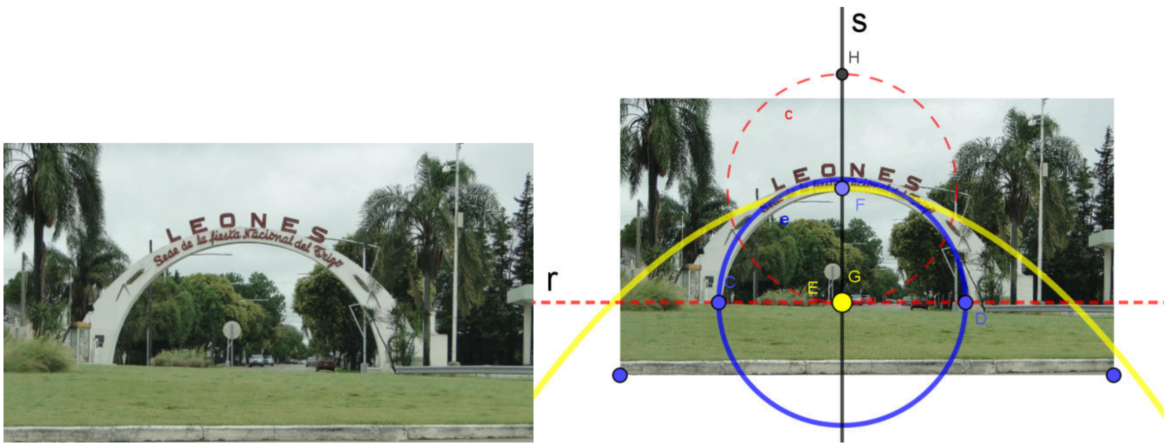


Figura 8 – arco de acesso à cidade de Leones
Fonte: arquivo do autor

[8] La curva cuya forma toma una cuerda perfectamente flexible, inextensible y de densidad uniforme, que cuelga de dos suportes no situados en la misma vertical.

[9] The above argument shows that each minimal surface in R^3 which can be obtained by rotating the graph of a smooth function about the x_1-axis is a portion of a catenoid.

A resposta é similar àquela indicada a respeito das curvas formadas por fios suspensos, uma vez que os coparticipes que acompanhavam o geômetra, embora não atuando na área de Matemática, logo lhe disseram: “lindo aquele arco parabólico”!

Chama-se atenção, na Figura 7 e na última imagem da Figura 8, para o uso de software de Geometria Dinâmica, a fim de buscar alguma forma de visualizar os conceitos geométricos. A respeito disso, Arcavi (1999, p. 217) afirma:

> visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão.

Portanto, o uso do software GeoGebra possibilitou que as diferenças existentes entre as duas curvas apreciadas pelo geômetra, sendo possível reunir, durante esse processo,a experiência e o conhecimento analítico do pesquisador. Além disso, o trabalho esteve ancorado em aspectos visuais e científicos, como é esperado em uma pesquisa acadêmica.

7 Considerações finais

Neste artigo, apresentamos uma pesquisa qualitativa de cunho teórico,a qual teve por objetivo analisar o olhar do geômetra formador ao realizar uma viagem, observar determinados fatos, objetos, cenários etc. e associá-los a conteúdos matemáticos. Os dados foram coletados no mês de janeiro de 2020, em território argentino.

Foram feitas quatro incursões por meio de registros fotográficos, os quais suscitaram possibilidades de desenvolver conexões entre conteúdos geométricos e matemáticos. Dessa forma, é possível que professores em exercício ou em formação, tanto da escola básica, quanto do ensino superior e em ação continuada, utilizem didaticamente imagens encontradas em diversas situações cotidianas. Entende-se que práticas desse tipo possam estimular os estudantes a vislumbrarem a aplicabilidade de elementos geométricos e matemáticos no mundo real.

Para a análise dos dados, foram utilizados os conceitos de compreensão relacional e instrumental, assim como as noções de visualização e imaginação.

Considerou-se o uso de software de Geometria Dinâmica, visto que as habilidades visuais não são natas e podem ser desenvolvidas no ensino e aprendizagem de Geometria, até mesmo para serem exploradas na Matemática em geral.

Na primeira incursão,reporta-se à visualização de pontos cuspidais, isto é, aqueles em que não há derivada, como é o caso dos exemplos encontrados em uma construção civil de um edifício residencial na cidade de Rosário.Com isso, incentiva-se o estudo de tal conteúdo no Cálculo Diferencial, apoiado em Geometria.

Na segunda incursão, o olhar do geômetra se ateve, particularmente, à cobertura nada convencional de uma residência simples, em uma zona de pouca urbanização, em uma rodovia na direção da cidade de Nogoli. Tal cobertura apresenta o formato cônico que a torna atípica.

Na terceira incursão geométrica, é feita referência a Gauss e à sua contribuição para a Geometria Diferencial, particularmente no que diz respeito às curvas geodésicas e à curvatura de superfícies. Essa matemática foi visualizada nos rastros deixados pelo degelo no parque de Aconcágua, os quais apresentam curvas que o geômetra associa à história a respeito das observações de Gauss sobre as linhas que descem de uma montanha, a partir das quais o matemático definiu a curvatura gaussiana de superfícies.

Por fim, na quarta incursão, o geômetra, ao observar um arco na entrada da cidade de Leones, explica a seus parceiros de viagem que este não era um arco parabólico, mas de catenária,ou seja, uma curva importante para o estudo das superfícies regradas e que dá suporte à exploração de superfícies mínimas. Nesse caminho, o auxílio de Geometria Dinâmica tornou-se elemento facilitador da visualização como construto mental.

Acredita-se que a incursão pelo caminho da Matemática, por meio da Geometria analisada neste artigo, possa ser um elemento que oferece aos professores de diferentes níveis possibilidades didáticas diferenciadas, uma vez que possibilita a exploração conceitual de temas relevantes para a formação dos indivíduos. Para além disso, acredita-se que a habilidade de visualização é importante de ser implementada, particularmente, na Educação Matemática e na formação de professores. Assim, entende-se que incentivar e estimular os estudantes para perceberem a geometria que existe nas 'coisas' a torne mais atrativa e desperte o interesse pelo seu estudo.

Referências

Anton, H. (2000). *Cálculo: um novo horizonte*. 6.ed. v.1. Porto Alegre: Bookman.

Arcavi, A. (1999). The role of visual representation in the learning of mathematics. In: North American Chapeter of the PME, *Proceedings...*Retiradoem 10 de janeiro de 2009 de: http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/pdf/26.pdf.

Boero, P. & Bussi, M. G. B. (1998). Teaching and learning Geometry in contexts. In: Mamana, Carmelo; Villani, Vinício. *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*: an ICMI study. Nethrlands: kluwer Academic Publishers. pp.52-62.

Courant, R. & Robbins, H. (2000). *O que é matemática?*Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda.

Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrias*. Tomo I. Trad. Susana B. de Siperstein. México: UTHEMA.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research*. Califórnia.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics:* an educational approach. London: Mathematics Education Library.

Hershkowitz, R. (1998). Reasoning in Geometry. In: Mamana, Carmelo; Villani, Vinício. *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*: an ICMI study. Nethrlands: kluwer Academic Publishers. pp.29-37.

Hilbert, D. & Cohn-Vossen, S. (1932). *Geometry and the imagination*. New York: Chelsea Publishing Company.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura em Mate*mática. Tese de Doutorado (Educação Matemática) na UFPR. Curitiba, 294p.

Leivas, J. C. P. (2019). Geometria: uma 'viagem' didática ou 'uma metodologia de ensino'. *Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática*. Cuiabá/MT – 14-17 de julho de 2019. Retirado em 15 de janeiro de 2020. de: https://sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php

Leivas, J. C. P. (2019a). Desenvolvendo habilidade de representação geométrica por meio de quebra-cabeças espaciais. *RenCiMa, v. 10, n. 2, p. 30-47,* São Paulo.

Skemp, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. 2ª ed. Madrid: Edições Morata.

Skemp, R. (2016). Compreensão Relacional e compreensão instrumental. *Educação e Matemática*, nº 136, p. 44-48.

Struik, D. J. (1997). *História concisa das matemáticas*. Lisboa. 3ª edição. Editora Gradiva.

Thorpe, John A . (1978). *Elementary Topics in Differential Geometry*. EstadosUnidos: Springer-Verlag.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics: a project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of The Mathematical Association of America*. Washington: MAA.