Tecnologias no Ensino Superior: uso do GeoGebra mobile como ferramenta didática

Resumo: Na busca por uma participação ativa dos discentes no processo de ensino e aprendizagem, alternativas são propostas e podem considerar recursos tecnológicos como aliados na apropriação adequada de conhecimentos. Então, é proposto uma intervenção didática auxiliada pelo aplicativo GeoGebra Mobile em duas e três dimensões como ação facilitadora e motivadora no ensino e aprendizagem de integrais duplas e triplas durante as aulas de cálculo diferencial e integral. Com o uso do aplicativo, os discentes foram capazes de interagir com as interfaces gráficas e fazer as interpretações das atividades solicitadas, bem como desenvolver resoluções satisfatórias para os problemas propostos em avaliação de aprendizagem, o que mostra que as tecnologias móveis podem ser consideradas como agentes facilitadores no ensino de integrais múltiplas.

Palavras-chave: Tecnologia móvel. Interação. Ensino e aprendizagem. Integrais.

Technologies in Higher Education: use of GeoGebra mobile as a didactic tool

Abstract: In the search for an active participation of students in the process of teaching and learning, alternatives are proposed and may consider technological resources as allies in the appropriate appropriation of knowledge. Therefore, a didactic intervention supported by the GeoGebra Mobile app in two and three dimensions is proposed as a facilitating and motivating action in teaching and learning of double and triple integrals during classes of differential and integral calculus. With the use of the app, the students were able to interact with the graphical interfaces and interpret the requested activities, as well as develop satisfactory resolutions for the problems proposed in learning assessment, which shows that mobile technologies can be considered as agents facilitators in teaching multiple integrals.

Keywords: Mobile technology. Interaction. Teaching and learning. Integrals.

Tecnologías en Educación Superior: uso de GeoGebra mobile como herramienta didáctica



Maria do Socorro Ferreira Ramos

Mestranda em Ensino na Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN). Rio Grande do Norte, Brasil.

© orcid.org/0000-0001-6943-6732

⊠ mariasframos@gmail.com

Otávio Paulino Lavor

Doutor em Engenharia Elétrica (UFRN). Professor da Universidade Federal Rural do Semi-árido (UFERSA). Rio Grande do Norte, Brasil.

orcid.org/0000-0001-5237-3392

otavio.lavor@ufersa.edu.br

Recebido em 12/09/2020 Aceito em 18/10/2020 Publicado em 20/10/2020

eISSN 2675-1933 10.37853/pqe.e202044



Resumen: En la búsqueda de una participación activo de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, se proponen alternativas y pueden considerar los recursos tecnológicos como aliados en la adecuada apropiación del conocimiento. Por tanto, se propone una intervención didáctica apoyada en la aplicación GeoGebra Mobile en dos y tres dimensiones como una acción facilitadora y motivadora en la enseñanza y aprendizaje de integrales dobles y triples durante las clases de cálculo diferencial e integral. Con el uso de la aplicación, los estudiantes pudieron interactuar con las interfaces gráficas e actividades solicitadas. interpretar las desarrollar resoluciones satisfactorias a los problemas propuestos en la evaluación del aprendizaje, lo que demuestra que las tecnologías móviles pueden ser consideradas como agentes. facilitadores en la enseñanza de múltiples integrales.

Palabras clave: Tecnología móvil. Interacción. Enseñanza y aprendizaje. Integrales.

1 Introdução

O cálculo diferencial e integral é uma disciplina ofertada em cursos superiores de engenharias e ciências exatas e teve seu desenvolvimento há séculos possuindo inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento. Sua compreensão é de grande relevância para apropriar-se de outros conteúdos que tem este como base. Grande parte dos problemas de derivadas estão intimamente relacionados a otimização e grande parte dos problemas de integrais estão ligados a áreas e volumes. A fim de uma compreensão satisfatória desse tipo de problemas, docentes pesquisadores têm efetuado investigações sobre os processos de ensino de aprendizagem do cálculo diferencial e integral.

Iniciativas estão sendo tomadas pensando em melhorias no ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral. Segundo Alvarenga, Dorr e Vieira (2016), todas as iniciativas revelam a preocupação de uma comunidade de acadêmicos com as consequências dos altos índices de reprovação e o desejo de se encontrarem caminhos que promovam a aprendizagem dos conteúdos aí estudados.



Esses caminhos são alternativas para a prática docente que busque motivação e inspiração para a apropriação de conceitos relevantes na construção do conhecimento acadêmico.

As integrais múltiplas fazem parte da disciplina de cálculo de várias variáveis e diversos problemas são solucionados com a aplicação deste conteúdo, tornando-o indispensável em cursos de engenharias e ciências exatas. Uma vez que tal conteúdo é relevante, alternativas para o seu ensino e aprendizagem precisam ser buscadas.

Lima, Bianchini e Gomes (2017) afirmam que o estudo de funções de uma variável real já foi objeto de pelo menos uma pesquisa, sendo a maior atenção voltada à derivada. Os autores destacam que há um número reduzido de investigações referentes aos conceitos de cálculo associados às funções de duas ou mais variáveis reais.

Marques (2016) propõe um projeto de construção de um material concreto implementado no *software Cubify Invent* e materializado na impressora 3D para o ensino de integrais duplas. O autor conclui que manipulando o modelo, o estudante não tem mais a preocupação de imaginar como o objeto em jogo se comporta no espaço tridimensional e com a possibilidade de manipular o modelo o estudante pode visualizar os crivos das superfícies envolvidas no problema.

Esse tipo de atividade desperta uma interação entre os objetos de estudo e o estudante. Diversas dificuldades percebidas em sala de aula consistem na visualização de objetos tridimensionais e as simulações tornam-se aliados neste processo.

Henriques, Nagamine e Nagamine (2012) apresentam uma análise institucional em torno dos currículos, dos livros didáticos e dos estudantes, considerando as integrais múltiplas como objeto de estudo. Os autores concluem que uma análise institucional permite identificar as condições e exigências que determinam as práticas institucionais em torno de objetos de estudo requeridos na formação de estudantes.

Sendo assim, as intervenções pedagógicas no ensino de integrais múltiplas devem considerar os conteúdos obrigatórios e os recursos disponíveis a fim de criar interação no meio. Pode-se ver que dentre as alternativas buscadas por pesquisadores, pode-se citar as tecnologias de informação e comunicação que tem papel de destaque na educação.



Segundo Silva (2019) e Leite (2020), o uso das tecnologias digitais mostra-se cada dia mais importante, visto que computadores, laptops, smartphones e tablets fazem parte dos equipamentos a serem carregados diariamente e considerados pela maioria das pessoas como indispensáveis ao sair de casa.

Então, como as tecnologias estão inseridas no dia a dia do público envolvido, propõe-se o uso de recursos tecnológicos no ambiente acadêmico para que haja interação de forma facilitadora na apropriação de conhecimentos. Um dos objetos tecnológicos presente no meio escolar, é o smartphone. Ruis, Tamariz e Batista (2019) afirmam que as tecnologias móveis têm se tornado cada vez mais ubíquas na vivência pós-moderna, convertendo-se praticamente em objetos indispensáveis no cotidiano de milhares de crianças, jovens e até mesmo adultos. Os autores ressaltam ainda que essa crescente necessidade de mobilidade e imediatismo das pessoas, a qualquer tempo e espaço, estimula a troca de informações e o compartilhamento de ideias, de experiências e de conhecimentos.

Como exemplo de tecnologia para o ensino, pode-se citar o GeoGebra. Feitosa, Aquino e Lavor (2020) utilizaram este recurso no ensino de retas e planos, constatando que a aprendizagem pode ser dinâmica e interativa quando o GeoGebra é utilizado. No ensino de funções inversas e logarítmicas numa disciplina de cálculo, Feitosa et al (2020) verificaram que os estudantes, ao utilizarem o GeoGebra, obtiveram melhor rendimento.

Diante do exposto, surge a indagação em relação ao ensino de cálculo, e em especial as integrais duplas e triplas, em que se questionam os efeitos da inserção de tecnologias móveis em aulas de cálculo.

2 Metodologia

A pesquisa consiste numa investigação no ensino de integrais múltiplas, realizada em uma turma de Introdução às Funções de Várias Variáveis em um curso de Tecnologia da Informação em uma Universidade situada no semiárido potiguar. As atividades foram realizadas com dez alunos durante doze horas e consistiu das seguintes fases:



apresentação de conceitos de integrais duplas e triplas, apresentação e uso de aplicativo móvel; atividades com o uso do aplicativo e avaliação da aprendizagem.

Tendo em vista que a turma já possui conhecimentos de funções de várias variáveis e suas derivadas, apresenta-se os conteúdos de soma de Riemann para funções de duas e três variáveis, os limites de integração em regiões gerais no plano e no espaço e as técnicas de integração.

Na fase de utilização de recursos tecnológicos, destaca-se o GeoGebra como uma das tecnologias utilizadas na educação matemática. O GeoGebra que tem sido utilizado por Fusco e Ziccardi (2019) para trabalhar o ensino e aprendizagem em geometria analítica e cálculo vetorial, enquanto que Lima e Freitas (2018), utiliza em problemas de otimização no ensino médio. Ortega e Abbeg (2016) utiliza para o ensino de equações algébricas e Diógenes (2019) o explora em aulas de geometria diferencial de curvas. Como pode-se ver, este recurso tem auxiliado os processos em diferentes contextos e níveis de ensino.

Tendo em vista as tecnologias móveis a serem utilizadas em *smartphones*, apresenta-se o GeoGebra na versão *mobile* que é oferecido pelo *International GeoGebra Institute*. A Figura 1 mostra a tela inicial ao abrir o aplicativo na versão bidimensional.

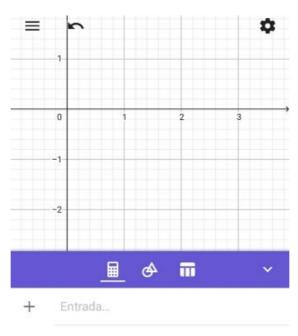


Figura 1 – Tela inicial do GeoGebra 2D Fonte: Autores



Na tela inicial, tem-se o espaço bidimensional e a opção de entrada, onde serão digitadas as funções que se deseja obter o gráfico. A Figura 2 mostra um exemplo de região no plano plotada no GeoGebra.

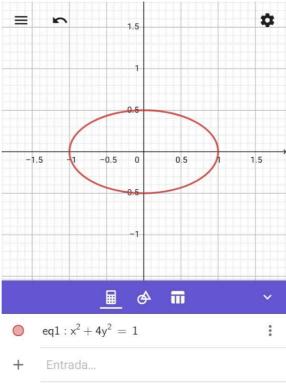


Figura 2- Elipse no GeoGebra 2D Fonte: Autor (2019)

Neste exemplo, pode-se ver uma elipse com eixo maior sobre o eixo horizontal. Neste exemplo, pode-se acrescentar outras regiões, como pode ser na opção com sinal de adição. Na Figura 3, tem-se a tela inicial da versão tridimensional.

Assim como em duas dimensões, tem-se o espaço tridimensional com a opção de entrada onde se digita a função que se deseja o gráfico. A Figura 4 mostra um exemplo de região plotada.

Na figura 4, vê-se um elipsoide centrado na origem do sistema com eixo maior sobre o eixo x. As figuras 2 e 4 mostram regiões bidimensionais e tridimensionais onde pode-se observar a região em detalhes, bem como obter limites de integração.



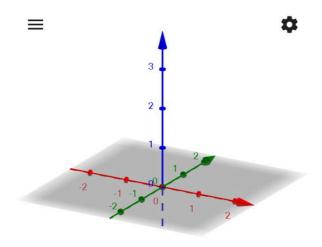
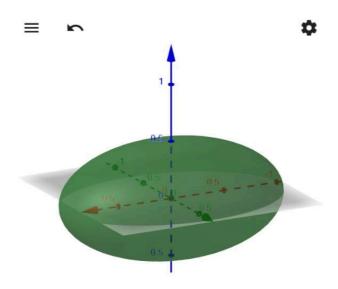




Figura 3 – Tela inicial do GeoGebra 3D Fonte: Autores



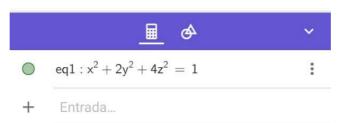


Figura 4 – Elipsoide no Geogebra 3D Fontes: Autores



Uma vez apresentado o GeoGebra *mobile* em duas e três dimensões, propõe-se atividades de fixação com intuito de gerar apropriação dos conceitos de integrais múltiplas, em especial limites de integração. Na sequência, faz-se a avaliação de aprendizagem, onde é esperada a compreensão de regiões gerais no plano e no espaço, bem como a interpretação e resolução de questões que envolvam os conhecimentos de integrais múltiplas. A seção seguinte mostra os resultados desta intervenção.

3 Resultados

Durante a apresentação dos conteúdos com o uso do GeoGebra, foi perceptível uma maior interação que em outros momentos. Durante as atividades propostas, todos os envolvidos participaram ativamente, sejam com perguntas, respostas ou sugestões. Uma tarefa foi solicitada para fazer avaliação de aprendizagem. Em tal tarefa, foi solicitado a resolução de três questões: uma primeira que explora integração sobre uma região no plano em coordenadas retangulares, uma segunda que explora integração em uma região no plano em coordenadas polares e uma terceira que explora a integração em uma região no espaço tridimensional. No que segue, são apresentados os resultados de cada questão. A primeira questão pede a integral da função

$$f(x) = \frac{xe^{2y}}{4-y} \tag{1}$$

sobre a região limitada por y = 0, $y = 4 - x^2$, x = 0ex = 2. Esse tipo de questão espera a compreensão de integrais iteradas, visto que a função dada tem uma maior dificuldade para integração primeiro em y que primeiro em x. A Figura 5 mostra os limites de integração plotados no GeoGebra em duas dimensões.

Nesta questão, todos os discentes perceberam que a integração primeiramente em y traria um maior grau de dificuldade, mostrando que compreenderam o conteúdo de integrais iteradas. Quanto a integração em coordenadas retangulares, todos discentes conseguiram encontrar a resposta $(e^8 - 1)/4$. A Figura 6 mostra a resposta de um dos discentes.



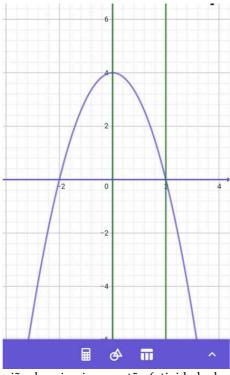


Figura 5 – Região da primeira questão (atividade do estudante A) Fonte: Dados da pesquisa

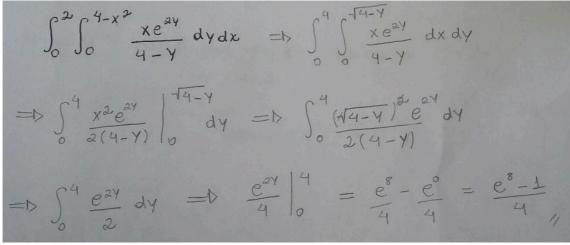


Figura 6- Resposta da primeira questão (atividade do estudante B) Fonte: Dados da pesquisa

A segunda questão pede a área da região que é comum às cardióides $r=1+cos\theta$ e $r=1-cos\theta$. Esta questão espera a compreensão de coordenadas polares, bem como os limites de integração para regiões dadas neste sistema de coordenadas. A Figura 7 mostra as cardioides plotadas no GeoGebra em duas dimensões.



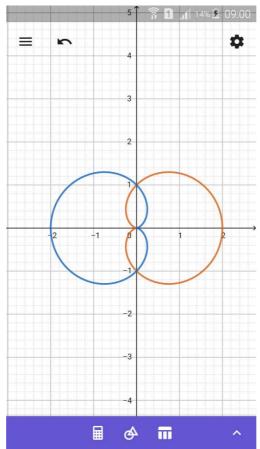


Figura 7 – Região da segunda questão (atividade do estudante C) Fonte: Dados da pesquisa

Nesta figura, os estudantes conseguiram compreender a região de integração. Nesta questão, nem todos discentes perceberam a simetria em relação aos eixos coordenados, onde 80% deles calculou apenas uma área e multiplicou por quatro. Neste caso, usaram como limites de integração $0 \le r \le 1 - cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$. A Figura 8 mostra uma destas resoluções.

Os outros 20% conseguiram êxito na questão, no entanto não compreenderam a simetria e tiveram um maior tempo investido porque precisaram usar uma integral dupla para cada região, visto que os limites são alterados de inferior para superior em cada quadrante.

A terceira questão pede o volume da região limitada pelos parabolóides $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$. Nesta questão, é esperado a compreensão de limites de integração, onde precisa-se obter a interseção entre as superfícies para encontrar os



limites de integração no plano. A Figura 9 mostra as superfícies plotadas no GeoGebra tridimensional.

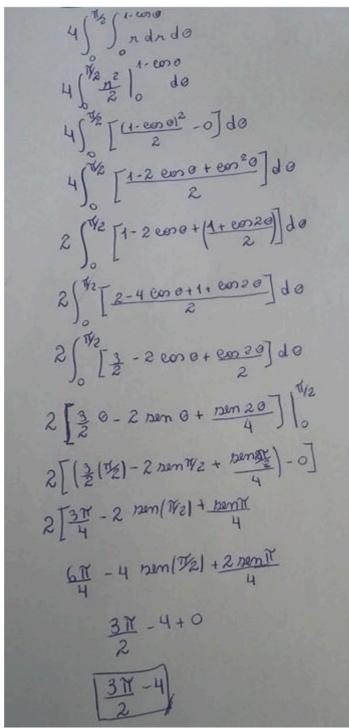


Figura 8 – Resolução da segunda questão (atividade do estudante D) Fonte: Dados da pesquisa



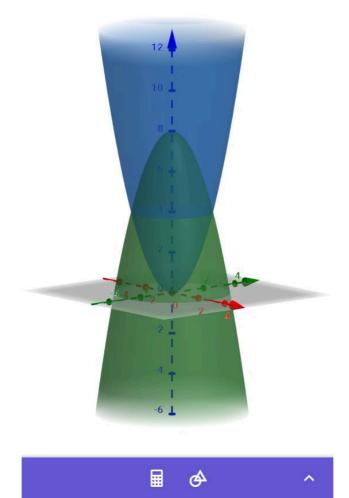


Figura 9 – Região da terceira questão (atividade do estudante E) Fonte: Dados da pesquisa

Nesta questão, todos discentes encontraram a região de interseção que fornece os limites para x e y. A Figura 10 mostra a interseção que é um círculo de raio 2.



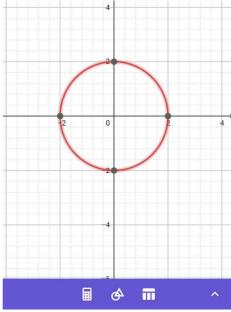


Figura 10 – Interseção da região da terceira questão (atividade do estudante E) Fonte: Dados da pesquisa

Todos os estudantes encontraram a resposta 16π para o volume solicitado. A Figura 11 mostra uma resolução.

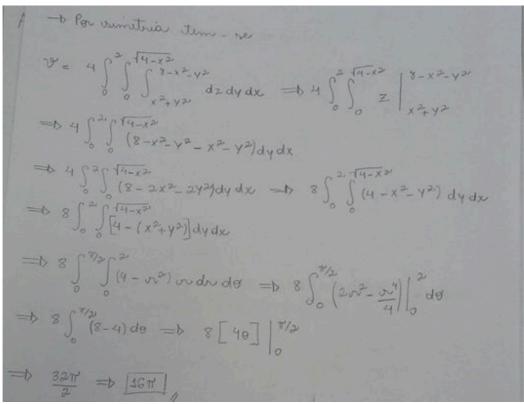


Figura 11 – Resolução da terceira questão (atividade do estudante F) Fonte: Dados da pesquisa



Neste caso, o estudante compreendeu a simetria da região, bem como os limites de integração. Destaca-se aqui a compreensão em relacionar e interagir com o conhecimento anterior de integração em coordenadas polares.

Diante de todo o contexto, constatou-se que a avaliação de aprendizagem aponta para uma apropriação de conhecimentos de forma interativa, onde a tecnologia do aplicativo foi um aliado na compreensão das regiões no plano e no espaço.

Após estas fases, foi proposto um questionário de satisfação. Todos os discentes utilizaram o GeoGebra nas duas versões. Destes discentes, 67% considera que a sua aprendizagem foi ótima enquanto que 33% considera a aprendizagem boa, donde percebe-se que todos consideram terem adquirido uma boa apropriação de integrais múltiplas.

Todos os discentes mencionam que o GeoGebra os auxiliou na compreensão dos conceitos e em especial, dos limites de integração. Todos afirmam ainda que essas tecnologias devem ser consideradas em todas as aulas de cálculo diferencial e integral.

Aos estudantes, foi solicitado um comentário de forma geral a respeito da intervenção. A seguir, transcrevem-se alguns dos comentários.

Estudante A: O uso das tecnologias auxilia na visualização dos gráficos, sendo extremamente importante para a compreensão. Além disso, motiva a estudar durante o uso do aparelho, pois se torna prático.

Estudante B: A maior vantagem é que podemos visualizar gráficos que seriam difíceis sem a tecnologia, além de aprender interagindo.

Pode-se ver que os estudantes compreendem o quão os aplicativos podem contribuir para a aprendizagem tornando o processo mais dinâmico e interativo. Entende-se ainda que o aplicativo não substitui o trabalho desprendido pelo docente e discente para se obter uma aprendizagem significativa e esse entendimento é acompanhado por estudantes. Abaixo, transcreve-se o comentário de um discente.

Estudante C: O uso do aplicativo descomplica o desenvolvimento das questões, pois fica notório o porquê de cada limite de integração gerando ganho de tempo e compreensão. No entanto, apesar dos aplicativos serem bastante didáticos, requer atenção para



aprender o conteúdo, pois não adianta só jogar nos aplicativos, é necessário saber o que está fazendo.

Este comentário vem a contribuir com Abar e Alencar (2013) que diz que a ideia é que o professor utilize o GeoGebra não apenas como mais um recurso tecnológico, mas como um recurso que colabore no desenvolvimento de conceitos matemáticos, uma vez que, o software sozinho não faz matemática.

4 Considerações finais

A educação matemática vem passando por diversas intervenções a fim de encontrar melhorias nos processos de ensino e aprendizagem. Estas intervenções estão sendo consideradas em todos os níveis de ensino e no ensino superior, chama a atenção o cálculo diferencial e integral de várias variáveis que possui diversas aplicações, sendo base para problemas de ciências exatas e engenharias. Neste trabalho, foi considerada uma intervenção no ensino de integrais múltiplas, onde foi apresentado integrais duplas no plano e no espaço auxiliado pelo GeoGebra mobile. Os resultados apontam para interação entre o conteúdo e aplicativo, mostrando que a tecnologia móvel pode ser compreendida como ferramenta didática no ensino destes conteúdos. A avaliação de aprendizagem constatou que os estudantes se sentiram motivados a aprender e tiveram interpretação correta das solicitações alcançando resoluções satisfatórias para os problemas.

Os estudantes mostraram elevado grau de satisfação com a aprendizagem e com a interatividade nas atividades realizadas. Então, a intervenção leva a crer em um processo de ensino e aprendizagem interativo com participação de docentes e discentes auxiliado por tecnologias. Como perspectivas futuras, espera-se executar este percurso metodológico em outros conteúdos de matemática, bem como utilizar outras tecnologias a fim de gerar participação ativa no processo de ensino e aprendizagem.

Referências



- Abar, C. A. A. P. & Alencar, S. V. (2013). A Gênese Instrumental na Interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. *Bolema*, 27(46), 349-365. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n46/v27n46a02.pdf>. Acesso em 12 de setembro de 2020.
- Alvarenga, K. B.; Dorr, R. C. & Vieira, V. D. (2016). O ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, 2(4), 46-57. Disponível em: https://seer.imed.edu.br/index.php/REBES/article/view/1518. Acesso em 05 de janeiro de 2020.
- Diógenes, R. (2019). Geometria diferencial de curvas planas com GeoGebra. *Professor de Matemática Online*, 7(2), 226-233. Disponível em: http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2019/10/art18 vol7 2019 SBM PMO-final.pdf. Acesso em 30 de novembro de 2019.
- Feitosa, M. C., Aquino, A. A. & Lavor, O. P. (2020). Ensino de Retas e Planos com Auxílio do Software GeoGebra 3D Mobile. REAMEC Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, 8(2), 374-391. Disponível em: < https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/10042/p df . Acesso em 15 de outubro de 2020.
- Feitosa, M. C., Aquino, A. A., Sousa, B. F. & Lavor, O. P. (2020). O Uso do GeoGebra como Ferramenta Auxiliar no Ensino de Funções Inversas e Logarítmicas. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, 6(2), e2003. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/3952/2737. Acesso em 15 de outubro de 2020.
- Fusco, C. A. S. & Ziccardi, L. R. N. (2019). Aprendizagem Significativa de Matemática em um Curso Superior de Engenharia Utilizando o GeoGebra. *Ensino da Matemática em Debate*, 6(2), 84-95. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emd/article/view/42204. Acesso em 02 de dezembro de 2019.



- GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/download>. Acesso em 02 de dezembro de 2019.
- Henriques, A.; Nagamine, A. & Nagamine, C. M. L. (2012). Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. *Bolema*, 26(44), 1261-1288. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n44/08.pdf. Acesso em 30 de dezembro de 2019.
- Leite, B. S. (2020). Estudo do corpus latente da internet sobre as metodologias ativas e tecnologias digitais no ensino das Ciências. *Pesquisa e Ensino, 1*, e202012. https://doi.org/10.37853/pqe.e202012
- Lima, G. L.; Bianchini, B. L. & Gomes, E. (2017). Cálculo e análise: Mapeamento das Pesquisas do GT04 Educação Matemática no Ensino Superior. *Vidya*, 37(2), 317-334. Disponível em: https://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/download/2009/1946. Acesso em 30 de dezembro de 2019.
- Lima, J. & Freitas, L. R. (2018). O Uso do Software GeoGebra para o Estudo de Problemas de Otimização no Ensino Médio. *Professor de Matemática Online*, 6(1), 1-21.

 Disponível em: http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2018/06/23maio Artigo Lima e Freitas.pdf. Acesso em 30 de novembro de 2019.
- Marques, S. A. S. S. (2016). A Utilização de Um PCOC Materializado na Impressora 3D para o Ensino e Aprendizagem de Integrais Duplas. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6686 3876 ID.pdf>. Acesso em 18 de novembro de 2019.
- Ortega, R. & Abbeg, T. (2016). História, resolução numérica e GeoGebra no ensino de equações algébricas. *Professor de Matemática Online*, 4(1), 5-20. Disponível em: http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2016/02/pmo-sbm-v004-n001-ortega-junior-e-abbeg.pdf. Acesso em 30 de novembro de 2019.



- Ruis, L. S.; Tamariz, A. D. R. & Batista, S. C. F. (2019). Mobile games de entretenimento em práticas pedagógicas interdisciplinares. *RENOTE Revista Novas Tecnologias na Educação*, 17(1), 345-354. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/95841>. Acesso em 30 de novembro de 2019.
- Silva, P. F. (2019). O uso das Tecnologias Digitais como Ferramentas Cognitivas. *RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação*, 17(2), 76-86. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/96588>. Acesso em 30 de novembro de 2019.

